

3.3 改变方程形式

讲授内容：通过改变方程形式求解.

教学重点：灵活改变方程形式求解.

讲授学时： 0.5 学时

一. 解题思路

将方程从微商形式改写为微分形式，或从微分形式改写为微商形式，有时可以启发思路，想出求解办法.

二. 例题

例 3.7 解方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - y + 2}{x + y^2 + 4}.$$

解 这个方程如果把它改写成微分形式：

$$(x - y + 2)dx - (x + y^2 + 4)dy = 0.$$

容易验证它是一恰当方程，且其隐式通解为

$$\frac{x^2}{2} - xy + 2x - \frac{y^3}{3} - 4y = C. \quad \square$$

例 3.8 解方程

$$(\ln x + xy^2)dx + 2x^2ydy = 0.$$

解 容易验证它不是恰当方程，但如果把它改写成微商形式：

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\ln x + xy^2}{2x^2y},$$

则看出它可进一步改写为关于 y^2 的一阶线性方程：

$$\frac{dy^2}{dx} + \frac{1}{x}y^2 = -\frac{\ln x}{x^2}.$$

解之，可得到隐式通解

$$y^2 = \frac{1}{x} \left(C - \frac{1}{2} \ln^2 x \right). \quad \square$$

三. 习题

1. 解下列方程.

$$(1) \frac{dy}{dx} = \frac{x-y^2}{2xy+2y^3};$$

$$(2) \frac{dy}{dx} = \frac{e^x + \frac{1}{y}}{e^{\cos \sin y} + \frac{x}{y^2}}.$$

四. 作业

第 26 页: 第 1 题 (3), (6), (7).