

《常微分方程》试题(一)

一、单项选择题 (在每小题的四个备选答案中选出一个正确的答案, 并将其号码填入题干后的括号内。每小题 2 分, 共 10 分)

1. 方程 $y''' - x^2 y'' - x^5 = 1$ 的通解中含有任意常数的个数为 ()
A 1 B 2 C 3 D 4
2. 下列方程中的线性微分方程是 ()
A $\cos(x + y') = y$ B $yy' = y$ C $y'' = xy - x$ D $y''' = \sin y$
3. 微分方程 $y' = y$ 满足条件 $y(0) = 1$ 的特解是 ()
A e^x B $e^x - 1$ C ce^x (c 为任意常数) D $2 - e^x$
4. 当 $n = 1$ 时, 方程 $y' + p(x)y = q(x)y^n$ 最确切的名称是 ()
A 一阶方程 B 贝努利方程
C 一阶线性方程 D 一阶线性齐次方程
5. 在整个数轴上线性无关的一组函数是 ()
A $x, x+1, x-1$ B $0, x, x^2, x^3$
C e^{2+x}, e^{x-2} D e^{2-x}, e^{x-2}

二、填空题 (每小题 2 分, 共 10 分)

1. 具有性质“曲线上任一点的切线的纵截距是切点的横坐标和纵坐标的等差中项”的曲线所满足的微分方程是_____。
2. 已知 $y_1(x)$ 是二阶齐次线性方程 $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$ 的一个非零解, 则与 $y_1(x)$ 线性无关的另一解 $y_2(x) =$ _____。
3. 设 λ_0 是 n 阶常系数齐次线性方程特征方程的 k 重根, 则该方程相应于 λ_0 的 k 个线性无关解是_____。

4. $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ 是线性方程组 $\frac{dY}{dx} = A(x)Y$ 的基本解组的充分必要条件是

(1) _____, (2) _____。

5. 方程组 $\frac{dx}{dt} = 4x + y, \frac{dy}{dt} = 2x + 5y$ 的奇点类型是_____。

三、求出下列方程（组）的通解（每小题 10 分，共 40 分）

1. $x^2 \frac{dy}{dx} = xy - y^2$

2. $(y - 3x^2)dx - (4y - x)dy = 0$

3. $y'' - 2y' - 3y = 3x + 1$

4. $\frac{dx}{dt} = -3x + 48y - 28z, \frac{dy}{dt} = -4x + 40y - 22z, \frac{dz}{dt} = -6x + 57y - 31z.$

四（10分）、求出方程 $y = xy' + \frac{1}{y'}$ 的所有解。

五（10分）、讨论方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - 1}{2}$ 适合初值条件 $y(\ln 2) = -3$ 的解的存在区间。

六（10分）、试用形如 $V(x, y) = ax^m + by^n$ 的 Liapunov 函数判定方程组

$$\frac{dx}{dt} = y + x^3, \frac{dy}{dt} = -2x^3 + 2y^5$$
 零解的稳定性。

七（10分）、设函数 $f(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续且有界，试证明方程

$$\frac{dx}{dt} = f(t) - x$$
 的所有解均在 $[0, +\infty)$ 上有界。