

《常微分方程》试题(十)

一、求下列方程的通解(每小题 10 分,共 30 分):

(1) $\tan y dx - \cot x dy = 0.$

(2) $y dx + (x - 3x^3 y^2) dy = 0.$

(3) $y'' + y = \tan x.$

二(15 分)、求如下方程组的通解

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x - 2y + 2z, \\ \frac{dy}{dt} = -2x - y + 2z, \\ \frac{dz}{dt} = -3x - 2y + 3z. \end{cases}$$

三(5 分)、讨论方程 $\frac{dy}{dx} = 1 + \ln x$ 通过 (1,0) 的解的最大存在区间.

四(15 分)、求出系统

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2 + y - x^2, \\ \frac{dy}{dt} = 2x(x - y) \end{cases}$$

的奇点,确定它们的类型并画出奇点周围的轨线分布草图.

五(10 分)、判断下述系统的零解的稳定性:

$$\frac{dx}{dt} = y - x^3, \quad \frac{dy}{dt} = -2x^3 - 2y^3.$$

六(10 分)、试证明方程 $x'' + x = \cos t$ 没有周期解.

七(15 分)、容器内有 100 升盐水,含 10 千克盐.现在以每秒 3 升的均匀速率往容器内注入净水(假定净水与盐水立即调和),又以每秒 2 升的均匀速率从容器中抽出盐水,问 60 秒后容器内盐水的含量是多少?