

《常微分方程》试题（二）

一、单项选择题（在每小题的四个备选答案中选出一个正确的答案，并将其号码填入题干后的括号内。每小题 2 分，共 10 分）

1. 微分方程 $y'' - y'^3 = 2 \cos y' - y^5$ 的阶数是 ()

A 1 B 2 C 3 D 5

2. 下列方程中的线性微分方程是 ()

A $e^{x-y'} = y''$ B $y'' = xy - \sqrt{x}$ C $y'' y' = y$ D $y''' = \sin y$

3. 微分方程 $y'' - 5y' + 6y = 0$ 的一个特解是 ()

A e^{2x} B $e^{3x} - c_2 e^{2x}$ C $c_1 e^{3x} - c_2 e^{2x}$

D $c_1 e^{3x} - c_2 e^{2x}$ (其中 c_1, c_2 为任意常数)

4. 克莱罗方程的一般形式是 ()

A $y = xy' + \varphi(y')$ B $x = xy' + \varphi(y')$

C $y = xy + \varphi'(x)$ D $x = xy + \varphi(y')$

5. n 阶齐次线性方程的任意 $n+1$ 个解必 ()

A 可组成方程的一个基本解组 B 线性相关

C 朗斯基行列式恒不为 0 D 线性无关

二、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

1. 方程 $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ 存在只与 x 有关而与 y 无关的积分因子的充分必要条件是_____。

2. 已知 $\cos x$ 与 $\sin x$ 是二阶齐次线性方程 $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$ 的解，则

$a(x) =$ _____。

3. $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ 是线性方程组 $\frac{dY}{dx} = A(x)Y$ 的基本解组的充分必要条件是 (1) _____, (2) _____。

4. $y''+4y'-12y=0$ 的通解是_____。

5. 方程组 $\frac{dx}{dt} = -3x - y$, $\frac{dy}{dt} = 4x + y$ 的奇点类型是_____。

三、求出下列方程（组）的通解（每小题 10 分，共 40 分）

1. $x\sqrt{1-y^2}dx + y\sqrt{1-x^2}dy = 0$

2. $2(3xy^2 + 2x^3)dx + 3(2x^2y + y^2)dy = 0$

3. $y''-2y'-3y = e^{-x}$

4. $\frac{dx}{dt} = y + z$, $\frac{dy}{dt} = x + z$, $\frac{dz}{dt} = x + y$.

四（10分）、应用解的存在唯一性定理求 Cauchy 问题

$$\begin{cases} \frac{dx}{dy} = x^2 - y^2, & |x+1| \leq 1, |y| \leq 1 \\ y(-1) = 0 \end{cases} \text{ 的解的存在区间.}$$

五、应用题（10分） 求一曲线，使它上面的每一点的切线与两坐标轴所围成的三角形的面积均等于 2.

六（10分）、构造 Liapunov 函数判定方程组 $\frac{dx}{dt} = y$, $\frac{dy}{dt} = -x$

零解的稳定性.

七、证明题（10分） 设函数 $f(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续且 $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 1$, 试证明方

程 $\frac{dx}{dt} = f(t)x$ 有且仅有一个解满足 $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = -1$.