

《常微分方程》试题(三)

一、单项选择题 (在每小题的四个备选答案中选出一个正确的答案,并将其号码填入题干后的括号内。每小题2分,共10分)

1. 微分方程 $y' y''' - y^3 = \cos y' - y''$ 的阶数是 ()
A 1 B 2
C 3 D 4
2. 下列方程中的线性微分方程是 ()
A $e^{x-y'} = y''$ B $y^{(4)} + 3y''' = \sqrt{x}$ C $y'' y = y'$ D $y''' = y^2$
3. 微分方程 $y'' - 5y' + 6y = 0$ 的一个特解是 ()
A e^{2x} B $e^{3x} - c_2 e^{2x}$ C $c_1 e^{3x} + e^{2x}$
D $c_1 e^{3x} - c_2 e^{2x}$ (其中 c_1, c_2 为任意常数)
4. 当 $n=1$ 时, 方程 $y' + p(x)y = q(x)y^n$ 最确切的名称是 ()
A 一阶方程 B 贝努利方程
C 一阶线性方程 D 一阶线性齐次方程
5. 在整个数轴上线性无关的一组函数是 ()
A $10, \sin^2 x, \cos^2 x$ B $0, x, x^2$
C $10, \arcsin x, \arccos x$ D $e^x, x e^x, x^2 e^x$

二、填空题 (每小题2分,共10分)

1. 方程 $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ 以 $\mu(x, y)$ 为积分因子的充分必要条件是_____。

第1页(共2页)

2. 已知 e^x 与 e^{2x} 是二阶齐次线性方程 $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$ 的解, 则 $a(x) =$ _____。

3. 如果常系数线性方程组 $\frac{dY}{dx} = AY$ 的特征多项式的根的实部都是负数，
 则该方程组的任一解在 $x \rightarrow +\infty$ 时收敛于_____。
4. $y' = 3y^{2/3}$ 的奇解是_____。
5. 方程组 $\frac{dx}{dt} = -3x - 2y$, $\frac{dy}{dt} = 5x - y$ 的奇点类型是_____。

三、求出下列方程（组）的通解（每小题 10 分，共 40 分）

1. $(1+x^2)\frac{dy}{dx} = \arctg x$
2. $(x^2 + y)dy - 2xydx = 0$
3. $y'''+3y''+3y'+y = e^{-x}(x-5)$
4. $\frac{dx}{dt} = 3x - y + z$, $\frac{dy}{dt} = -x + 5y - z$, $\frac{dz}{dt} = x - y + 3z$.

四（10分）、讨论方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - 1}{2}$ 适合初值条件 $y(0) = 0$ 的解的存在区间.

五、应用题（10分） 求一曲线，使它上面的每一点的切线在两坐标轴上的截距之和为 1.

六（10分）、试用形如 $V(x, y) = ax^m + by^n$ 的 Liapunov 函数判定方程组

$$\frac{dx}{dt} = -4y - x^3, \quad \frac{dy}{dt} = 3x - y^3 \quad \text{零解的稳定性.}$$

七（10分）、设 $y(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续可微，且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [y'(x) + y(x)] = 0$ ，证明

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0.$$