《常微分方程》试题（四）

一、单项选择题 （在每小题的四个备选答案中选出一个正确的答案，并将其号码填入题干后的括号内。每小题 2 分，共 10 分）

1．微分方程 $y'''+y''^2-y^4=\cos y'$ 的阶数是 （　　　）

A 1　　B　2　　C 3　　D　4

2.下列方程中的线性微分方程是 （　　　）

A $\sin(x+y)=y''$　B $y^{(4)}+3y'''=\sin x$　C $y''y=y'$　D $y''=y^2$

3.微分方程 $y''-5y'+6y=0$ 的通积分是 （　　　）

A $y=e^{2x}$　B $y=e^{3x}-c_2e^{2x}$　C $y=c_1e^{3x}-e^{2x}$

D $y=c_1e^{3x}-c_2e^{2x}$ （其中 c_1,c_2 为任意常数）

4.下述方程中的齐次方程是 （　　　）

A $y=xy'+\varphi(y')$　B $xy'=y+xtg\dfrac{y}{x}$

C $y''=xy'+f(y)$　D $\cos ydx=\cos xdy$

5.在整个数轴上线性相关的一组向量函数是 （　　　）

A $(1,1,1)e^{3x}$，$(1,-2,1)e^{6x}$　B $(1,0,-1)e^{-2x}$，$(0,1,-1)e^{-2x}$

C $(0,-2,2)e^{-2x}$，$(0,1,-1)e^{-2x}$　D $(0,-2,2)e^{-4x}$，$(0,1,-1)e^{-2x}$

二、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

1．方程 $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ 存在只与 y 有关而与 x 无关的积分因子的充分必要条件是____________________________。

2．已知 $a_1(x),a_2(x),\cdots,a_n(x)$ 在 (a,b) 上连续， $y_1(x),y_2(x),\cdots,y_n(x)$ 是齐次线性方程 $y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_n(x)y=0$ 的 n 个解，$W(x)$ 是它的伏朗斯基行列式，则 $\forall x_0\in(a,b),W(x)=$________________________（刘维尔公式）。

3. 如果常系数线性方程组 $\frac{dY}{dx}=AY$ 的特征根都是正数，则它的解在 $t\to-\infty$ 时的极限是________。

4. $y''+29y'+100y=0$ 的通解是________________________。

5. 方程组 $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=-3x-y\\ \frac{dy}{dt}=4x+y\end{cases}$ 的奇点类型是________________。

三、求出下列方程（组）的通解（每小题 10 分，共 40 分）

1. $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x+y}$

2. $(3x^2+6xy^2)dx+(6x^2y+4y^3)dy=0$

3. $y''+y=2\sin x$

4. $\frac{dx}{dt}=y-5\cos t,\qquad \frac{dy}{dt}=2x+y.$

四（10 分）、讨论方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{y^2-1}{2}$ 适合初值条件 $y(\ln 2)=-3$ 的解的存在区间.

五、应用题（10 分）求一曲线，使它上面的每一点的切线在坐标轴上的截距之和为常数 2a.

六（10 分）、构造形如 $V(x,y)=ax^m+b\,y^n$ 的 Liapunov 函数，证明方程组

$$\frac{dx}{dt}=-xy^4,\qquad \frac{dy}{dt}=yx^4$$ 的零解是稳定的.

七（10 分）、证明方程 $\frac{dx}{dt}=t^{10}e^{-t}-x$ 的所有解均在 $[0,\ +\infty)$ 上有界.