

《常微分方程》试题（五）

一、单项选择题（在每小题的四个备选答案中选出一个正确的答案，并将其号码填入题干后的括号内。每小题 2 分，共 10 分）

1. 微分方程 $y'''+y''^2-y^4 = \cos y'$ 是 ()

A 三阶非线性方程

B 三阶线性方程

C 四阶非线性方程

D 四阶线性方程

2. 微分方程 $y''-y'-6y=0$ 的通解是 ()

A $y = e^{-2x}$

B $y = e^{3x} - c_2 e^{-2x}$

C $y = c_1 e^{3x} - e^{-2x}$

D $y = c_1 e^{3x} - c_2 e^{-2x}$ (其中 c_1, c_2 为任意常数)

3. 函数 $y = \frac{x^3}{5} + \frac{x^2}{2} + c$ 是方程 () 的解 (其中 c 为任意常数)

A $5y' = 3x^2 + 5x$

B $3y' = 3x^2 + 5x$

C $5y' = 5x^2 + 3x$

D $5y' = 3x^2 + 3x$

4. 下述方程中的全微分方程是 ()

A $\frac{xdy - ydx}{x + y} = 0$

B $\frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = 0$

C $xdy - ydx = 0$

D $x^2 dy + y^2 dx = 0$

5. 在整个数轴上线性相关的一组向量函数是 ()

A $(1,1)e^{3x}, (1,-2,1)e^{6x}$

B $(1,0,-1)e^{-2x}, (0,1,-1)e^{-2x}$

C $(0,-2,2)e^{-2x}, (0,1,-1)e^{-2x}$

D $(0,-2,2)e^{-4x}, (0,1,-1)e^{-2x}$

二、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

1. 具有性质“曲线上任一点的切线界于切点和纵坐标间部分长度为 2”的曲线所满足的微分方程是 _____。

2. 已知 $y_1(x), y_2(x)$ 是二阶齐次线性方程 $y'' + e^x y' + e^{2x} y = 0$ 的两个解, 且伏朗斯基行列式 $W(x) = W[y_1(x), y_2(x)] \neq 0$, 则 $W(x) =$ _____。

3. 设 λ_0 是 n 阶常系数齐次线性方程特征方程的 k 重根, 则该方程相应于 λ_0 的 k 个线性无关解是 _____。

4. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = 2x + y \end{cases}$ 的基本解组是 _____

5. 方程组 $\frac{dx}{dt} = -y - x(x^2 + y^2 - 1), \quad \frac{dy}{dt} = x - y(x^2 + y^2 - 1)$ 的极限环是 _____。

三、求下列方程(组)的通解(每小题 10 分, 共 40 分)

1. $\frac{dy}{dx} = y^2 \cos x$

2. $(2xy + x^2 y + \frac{y^3}{3})dx + (x^2 + y^2)dy = 0$

3. $y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x}$

4. $\frac{dx}{dt} = y + z, \quad \frac{dy}{dt} = x + z, \quad \frac{dz}{dt} = x + y.$

四(10分)、试用逐次逼近法求方程 $\frac{dy}{dx} = y^2 - x^2$ 适合初值条件 $\phi(0) = 1$ 的近似解 $\phi_0(x), \phi_1(x), \phi_2(x)$.

五(10分)、求出方程 $y = xy' + y' - y'^2$ 的所有解.

六(10分) 确定方程组 $\frac{dx}{dt} = 2x + y, \quad \frac{dy}{dt} = 3x - 2y$ 的奇点类型与稳定性.

七(10分)、设函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续且 $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$, 试证明方程

$$y'' + 4y' + 4y = f(x) \text{ 的任一解 } y(x) \text{ 满足 } \lim_{y \rightarrow +\infty} y(x) = 0.$$