

《常微分方程》试题(六)

一、单项选择题(在每小题的四个备选答案中选出一个正确的答案,并将其号码填入题干后的括号内.每小题2分,共10分)

1. 微分方程 $\frac{d^2y}{dx^2} - (\frac{dy}{dx})^2 + 12xy = 0$ 的阶数是 ()
A 1 B 2 C 3 D 4
2. 微分方程 $y' = y^2 - (x^2 + 1)y + 2x$ 的解是 ()
A $y = x^2 + 1$ B $y = 2x^2 + 1$ C $y = x^2 + 3$ D $y = 2x^2 + 3$
3. 微分方程 $\frac{dy}{dx} = P(x)y + Q(x)y^n$ 当 $n = 1$ 时为 ()
A 一阶线性齐次微分方程 B 一阶线性非齐次微分方程
C Bernoulli 方程 D 非线性微分方程
4. Lipschitz 条件是一阶微分方程存在唯一解的 () 条件
A 充分条件 B 必要条件 C 充分必要条件
D 既不是充分也不是必要条件
5. n 阶齐次线性方程的任意 $n + 1$ 个解必 ()
A 可组成方程的一个基本解组 B 线性相关
C 朗斯基行列式恒不为 0 D 线性无关

二、填空题(每小题2分,共10分)

1. n 阶线性微分方程的 n 个解线性无关的充分必要条件是 _____.
2. 微分方程 $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ 是全微分方程的充分必要条件是 _____.
3. $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ 是线性方程组 $\frac{dY}{dx} = A(x)Y$ 的基本解组的充分必要条件是 (1) _____, (2) _____.
4. $y' = 3y^{2/3}$ 的奇解是 _____.
5. 方程 $\frac{dy}{dx} = e^{x-y}$ 的通解为 _____.

三、求出下列方程(组)的通解(每小题10分,共40分)

1. $(1 + x^2)\frac{dy}{dx} = \arctan x;$

2. $(x^2 + y)dy - 2xydx = 0;$

3. $y'' - 2y' - 3y = 3x + 1;$

4. $\frac{dx}{dt} = -x + y + z, \quad \frac{dy}{dt} = x - y + z, \quad \frac{dz}{dt} = x + y - z.$

四、(10分) 验证 $\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix}$ 是方程组 $x' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x$, 其中 $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ 的基解矩阵.

五、(10分) 求一曲线, 使它的切线介于坐标轴间的部分被切点分成相等的部分.

六、(10分) 讨论方程 $\frac{dy}{dx} = (y^2 - 4)e^y$ 通过 $(1, 0)$ 的解的最大存在区间.

七、(10分) 设 $y(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续可微, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [y'(x) + y(x)] = 0$, 证明

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0.$$