

《常微分方程》试题(七)

一、求下述方程的通解(每小题10分,共30分):

$$(1) \quad x(y^2 - 1)dx + y(x^2 - 1)dy = 0.$$

$$(2) \quad (\cos x + \frac{1}{y})dx + (\frac{1}{y} - \frac{x}{y^2})dy = 0.$$

$$(3) \quad y'' + y = \tan x.$$

二(15分)、求如下方程组的通解

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y - z, \\ \frac{dy}{dt} = x + y, \\ \frac{dz}{dt} = 3x + z. \end{cases}$$

三(10分)、叙述 Cauchy 问题

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

解的存在唯一性定理和解的延展定理.

四(10分)、确定系统

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -ay + 4 \sin x \end{cases}$$

原点的奇点类型并画出原点周围的轨线分布草图.

五(15分)、设函数 $f(t)$ 在 $0 \leq t < +\infty$ 上连续, 且 $f(t) \rightarrow b(t \rightarrow +\infty)$, 试证明方程 $x' - x = f(t)$ 有且仅有一个解满足 $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = -b$, 其它的解满足 $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \infty$.

六(10分)、求曲线 $y = f(x)$, 使其上每一点的切线与两坐标轴所围成的三角形的面积为2.

七(10分)、求具有性质 $f(s+t) = \frac{f(t)+f(s)}{1-f(t)f(s)}$ 的函数 $f(x)$, 已知 $f'(0) = 2$.