

## 《常微分方程》试题(八)

一、求下列方程的通解(每小题10分,共30分):

$$(1) \quad y' - e^{x-y} + e^x = 0.$$

$$(2) \quad (x^2 + y)dy - 2xydx = 0.$$

$$(3) \quad y''' - 7y'' + 16y' - 12y = x.$$

二(15分)、求如下方程组的通解

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y + 4z, \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 2y - z, \\ \frac{dz}{dt} = 2x + y - z. \end{cases}$$

三(5分)、讨论方程  $\frac{dy}{dx} = 1 + \ln x$  通过  $(1, 0)$  的解的最大存在区间.

四(10分)、讨论常系数自治系统

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by, \\ \frac{dy}{dt} = cy \end{cases}$$

的奇点类型, 其中  $ac \neq 0$ .

五(15分)、试证明方程  $x' + x = \sin t^2$  的所有解在  $[0, +\infty)$  上有界.

六(10分)、试证明方程  $x'' + x = \cos t$  没有周期解.

七(15分)、求曲线  $y = f(x)$ , 使其上每一点的切线与两坐标轴所围成的三角形的面积为  $2a^2$ .