

《常微分方程》试题(九)

一、求下列方程的通解(每小题10分,共30分):

(1) $y' = y \ln y.$

(2) $2(3xy^2 + 2x^3)dx + 3(2x^2y + y^2)dy = 0.$

(3) $y'' + y = \sec x.$

二(15分)、求如下方程组的通解

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y + 4z, \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 2y - z, \\ \frac{dz}{dt} = 2x + y - z. \end{cases}$$

三(10分)、讨论方程 $\frac{dy}{dx} = y^2$ 通过 $(0, 1)$ 的解的最大存在区间.

四(10分)、确定系统

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -ay + 4 \sin x \end{cases}$$

原点的奇点类型并画出原点周围的轨线分布草图.

五(10分)、判断下述系统的零解的稳定性:

$$\frac{dx}{dt} = -x^5 - y^3, \quad \frac{dy}{dt} = 3x^3 - y^3.$$

六(10分)、试证明方程 $x'' + x = -\sin t$ 没有周期解.

七(15分)、求曲线 $y = f(x)$, 使其上每一点的切线夹在两坐标轴间的那一段的长度为 a .