概率统计第一章习题课

1-8

由 $P(AB)=0 \cancel{\Rightarrow} AB=\Phi$

$\Rightarrow ABC=\Phi \Rightarrow P(ABC)=0$

故 $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)$

$-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$

$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-0-\frac{1}{8}-0+0=\frac{5}{8}$

求解过程是否正确？—— 否 错在何处？

另证

$$
\begin{aligned}
P(ABC) &= P(C-\overline{AB}) = P(C - C\overline{AB}) \\
&= P(C) - P(C\overline{AB}) \\
&= P(C) - P(C - AB) \\
&\overset{?}{=} P(C) - [\,P(C) - P(AB)] \\
&= P(AB) = 0.
\end{aligned}
$$

因为题中并未设 $AB \subset C$.

正确推导 由 $ABC \subset AB \Rightarrow$

$$0 \le P(ABC) \le P(AB) = 0 \Rightarrow P(ABC) = 0$$

$\boxed{\mathbf{1\text{-}12}}$ **解一** $n = 20000$, 计算有利场合数

$$k = 6878 \begin{cases} 有一位8 — C_4^1 C_2^1 C_9^1 C_9^1 C_9^1 = 5832 \\ 有两位8 — \quad C_4^2 C_2^1 C_9^1 C_9^1 = 972 \\ 有三位8 — \quad C_4^3 C_2^1 C_9^1 = 72 \\ 有四位8 — \quad C_2^1 = 2 \end{cases}$$

$$\therefore\ P = k/n = 6878/20000 = 0.3439.$$

解二 设A为事件"牌号有8"，A_i为事件"第i位上有8"(从个位数起)，$i=1\sim4$

则 $A=\bigcup_{i=1}^{4}A_i$，$P(A_i)=0.1$，$i=1\sim4$.

$$P(A)=P(\bigcup_{i=1}^{4}A_i)=1-P(\bigcap_{i=1}^{4}\overline{A_i})$$

$$=1-[P(\overline{A_i})]^4=1-0.9^4=0.3439.$$

解三 $P=1-P(\text{无}8)=1-9^4/10^4=0.3439.$

1- 19 $n=C_{12}^{4}$

① $k=C_6^1C_5^1C_4^1$ ✗ $P=k/n=8/33$

② $k=C_6^1C_8^1C_5^1C_2^1$ ✗ $P=k/n=16/33$?

③ $k=C_6^1C_5^1C_2^1C_4^1C_2^1$ ✗ $P=k/n=32/33$

④ $k=C_6^1C_{10}^2$ ✗ $P=k/n=18/33$

⑤ 设A为事件“恰有1双配对”，则

$\overline{A}$为事件“无1双配对”.

下面有利事件数 k 值均为 240，但形式各不相同, 如何解释？解释不通不算对.

$$k=C_6^2C_4^1C_4^1 \qquad k=C_6^1C_6^3C_2^1$$

$$k=C_6^1C_5^1C_8^1 \qquad k=C_2^1C_{12}^1C_{10}^1$$

$$k=P_6^1P_2^2P_5^2P_2^1$$

解一 $P=1-P(\text{无配对})-P(\text{全配对})$

$$=1-\frac{C_6^4 2^4}{C_{12}^4}-\frac{C_6^2}{C_{12}^4}=\frac{16}{33}$$

法二 $k=C_6^2C_2^1C_2^1\cdot C_4^1C_2^2$

$\boxed{\text{不配对}}$ $\boxed{\text{配对}}$

法三 $k=C_6^1\cdot C_5^2C_2^1C_2^1$

$\boxed{\text{配对}}$ $\boxed{\text{不配对}}$

法四 $k=C_6^1\cdot(C_{10}^2-C_5^1)$

法五 $k=C_6^1\cdot C_2^1C_5^1C_4^1$

$\boxed{\text{分左右不配对}}$

$n=C_{12}^4$

$P=k/n$

$=16/33$

1- 32

解一 设五个时段先后到家分别为事件 $A_i \quad i=1,2,3,4,5$；乘地铁与汽车回家为事件B、C．则 $B\cup C=\Omega$

$P(A_1B)=0.10 \qquad P(A_2B)=0.25 \qquad P(A_3B)=0.45$

$P(A_4B)=0.15 \qquad P(A_5B)=0.05$

$$P(A_1C)=0.30 \qquad P(A_2C)=0.35 \qquad P(A_3C)=0.20$$

$$P(A_4C)=0.10 \qquad P(A_5C)=0.05$$

$$P(B|A_3)+P(C|A_3)=\frac{P(A_3B)}{P(A_3)}+\frac{P(A_3C)}{P(A_3)}=1$$

$$P(A_3)=P(A_3B)+P(A_3C)=0.65$$

$$P(B|A_3)=\frac{P(A_3B)}{P(A_3)}=\frac{0.45}{0.65}=\frac{9}{13}.$$

解二 设事件 A为 5:47 到家;事件B为乘地铁回家. 由 Bayes 公式

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B)+P(\bar{B})P(A|\bar{B})}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\times 0.45}{\frac{1}{2}\times 0.45+\frac{1}{2}\times 0.20}=\frac{0.45}{0.65}=\frac{9}{13}.$$

评注 解一由于没抓住问题本质，考虑问题过于细致而导致解题过程罗嗦，解二较精炼．

1-37

解一 设甲、乙、丙为整场比赛的优胜者分别为事件A、B、C；事件甲胜第一局为D.

显然 $A \subset (D \cup \overline{D})$ 由全概率公式

$$P(A) = P(D)P(A|D) + P(\overline{D})P(A|\overline{D})$$
$$= \frac{1}{2}[P(A|D) + P(A|\overline{D})] \qquad (1)$$

1）甲已胜第一局. 甲要最终获胜必须甲胜第二局或者甲输了第二局后再获优胜，后一种情况与甲输了第一局后再获优胜完全一样.

$$P(A|D)=P(A_2\cup\overline{A_2}A)=P(A_2)+P(\overline{A_2}A)$$

$$=P(A_2)+P(\overline{A_2})P(A|\overline{A_2})$$

$$=P(A_2)+P(\overline{A_2})P(A|\overline{D})$$

$$=\frac{1}{2}[1+P(A|\overline{D})] \qquad (2)$$

2）甲已输第一局. 甲要最终获胜必须丙胜第二局，甲胜第三局后再获优胜的概率也就是 $P(A|D)$

因此 $$P(A|\overline{D}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot P(A|D) \qquad (3)$$

代入(2)得 $P(A|D)=4/7$

代入(3)得 $P(A|\overline{D})=1/7$

代入(1)得 $P(A)=5/14=P(B)$

丙要成为优胜者必须赢得第二局，然后再争最后优胜，而丙胜第二局后再争优胜的概率也是 $P(A|D)$

故 $P(C)=P(A|D)/2=2/7$

解二

设甲,乙,丙第i局获胜为事件A_i , B_i , C_i

$$P(\text{丙为优胜者})$$

$$= P[(A_1C_2C_3 \cup A_1C_2B_3A_4C_5C_6 \cup \cdots)$$

$$\cup (B_1C_2C_3 \cup B_1C_2A_3B_4C_5C_6 \cup \cdots)]$$

$$= 2\left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^9} + \cdots\right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-1/8} = \frac{2}{7}$$

$$P(\text{甲为优胜者})$$

$$= P(\text{乙为优胜者}) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{2}{7}\right) = \frac{5}{14}$$

解三 (类似解二)

设丙第 i 轮获胜为事件 A_i 则

$$P(A_i)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{8}\right)^{i-1}\qquad i=1,2,\cdots,$$

$$P（丙为优胜者）=P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-1/8}=\frac{2}{7}$$

$$P(甲为优胜者)$$

$$=P(乙为优胜者)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{2}{7}\right)=\frac{5}{14}$$

解四　（01 — 3204 班 庄启恺）

该比赛从第二局开始相当于以如下的比赛方式的循环，直到优胜者产生.

不妨定义在某一局比赛前:

1号位为上一场的胜者，2 号位为上一场轮空者，3号位为上一场的负者.

并设该局开始前三个位置上的选手成为比赛优胜者的概率分别为

$$p_1,\ p_2,\ p_3$$

在该局比赛中，若1号位选手获胜，则其赢得整场比赛;

若 1 号位选手告负，他将处于下局的 3 号位上;

而本局的 3 号位选手将处于下局的 2 号位上;

本局的2号位选手将处于下局的1 号位上.

综上所述，可得线性方程组

$$\begin{cases} p_1 + p_2 + p_3 = 1 \\ p_1 = 2p_2 \\ p_2 = 2p_3 \end{cases} \Longrightarrow p_2 = \frac{2}{7}$$

无论第一局比赛结果如何, 丙都将处于2号位上，故

$$P(\text{丙为优胜者}) = 2/7$$

$$P(\text{甲为优胜者})$$

$$= P(\text{乙为优胜者}) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{7}\right) = \frac{5}{14}$$

1-38 **解一** 设 A_i 为事件"第 i 个继电器闭合", $i=1\sim 5$

由广义加法定理

$$P(L\text{至}R\text{为通路})$$

$$=P(A_1A_2\cup A_4A_5\cup A_1A_3A_5\cup A_2A_3A_4)$$

$$=\cdots\cdots\cdots\cdots=\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$=2p^2+2p^3-5p^4+2p^5.$$

评论 计算冗长 毫无美感

解二 设 A为事件“L至R为通路”，B为“继电器3闭合”，则

$$B \cup \overline{B} = \Omega, \quad P(B) = p, P(\overline{B}) = 1 - p$$

若B发生，线路为先并联后串联，则

$$P(A|B) = [1-(1-p)^2]^2 = (2p - p^2)^2;$$

若 $\overline{B}$ 发生，线路为先串联后并联，则

$$P(A|\overline{B}) = 2p^2 - p^4.$$

由全概率公式

$$P(A)=P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B})$$

$$=2p^{2}+2p^{3}-5p^{4}+2p^{5}.$$

1-44 解一

$$P(\text{甲胜})_{\text{五}}=P_3(3)+P_3(2)\cdot 0.6+P_4(2)\cdot 0.6=0.682$$

$$>0.648=P_2(2)+P_2(1)\cdot 0.6=P(\text{甲胜})_{\text{三}}$$

所以，在五战三胜制下甲获胜的可能性大。

解二

$$P(\text{甲胜})_{\text{五}}=P_5(3)+P_5(4)+P_5(5)=0.682$$

$$>0.648=P_3(3)+P_3(2)=P(\text{甲胜})_{\text{三}}$$

补充作业

设事件A, B, C 同时发生必导致事件D 发生，则 $P(A)+P(B)+P(C)\le 2+P(D)$.

三类方法

- 利用广义加法公式证明

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

- 利用广义加法公式推论证明

$$P(A\cup B)\le P(A)+P(B)$$

- 利用积化差公式证明

$$P(A\bar{B})=P(A-AB)=P(A)-P(AB)$$

证一(1) $ABC \subset D \Rightarrow P(ABC) \le P(D)$

$$1 \ge P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

$$-P(AB) - P(BC) - P(CA) + P(ABC) \quad \cdots\cdots (1)$$

$$1 \ge P(AB \cup BC \cup CA) = P(AB)$$

$$+P(BC) + P(CA) - 2P(ABC) \quad \cdots\cdots (2)$$

$(1)+(2)$ $\quad 2 \ge P(A) + P(B) + P(C) - P(ABC)$

$$P(A) + P(B) + P(C) \le 2 + P(ABC) \le 2 + P(D).$$

证一 (2) 由 $ABC \subset D \Rightarrow P(ABC) \le P(D)$

$$P(A \cup B) \le 1 \Rightarrow P(A) + P(B) \le 1 + P(AB)$$

所以

$$P(A) + P(B) + P(C) \le 1 + P(AB) + P(C)$$

$$= 1 + P(AB \cup C) + P(ABC)$$

$$\le 2 + + P(ABC) \le 2 + P(D)$$

证一(3) 由广义加法定理

$$P(A)-P(ABC)=P(A\cup BC)-P(BC)$$

$$\Rightarrow\ P(A)+P(B)+P(C)-P(ABC)$$

$$=P(A\cup BC)+P(B)+P(C)-P(BC)$$

$$=P(A\cup BC)-P(B\cup C)\le 2$$

$$P(A)+P(B)+P(C)\le 2+P(ABC)\le 2+P(D).$$

证一(4) 由广义加法定理

$$P(A)+P(B)+P(C)$$

$$=P(A\cup B\cup C)+P(AB)+P(BC)+P(AC)-P(ABC)$$

$$=P(A\cup B\cup C)+P(AB\cup BC\cup CA)+P(ABC)$$

$$\leq 2+P(ABC)\leq 2+P(D).$$

证一(5) 由广义加法定理

$$P(A)+P(B)+P(C)-P(ABC)$$

$$=P(A\cup B\cup C)+P(AB\cup AC\cup BC)\leq 2$$

$$P(A)+P(B)+P(C)\leq 2+P(ABC)\leq 2+P(D).$$

证二

$$P(A)+P(B)+P(C)=3-P(\overline{A})-P(\overline{B})-P(\overline{C})$$

$$\leq 3-P(\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C})=3-P(\overline{ABC})$$

$$=2+P(ABC)\leq 2+P(D).$$

证三 由积化差公式

因为 $P(\overline{B}) \geq P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB)$

$P(\overline{C}) \geq P(AB\overline{C}) = P(AB) - P(ABC)$

故 $P(A) - P(\overline{B}) - P(\overline{C})$

$\leq P(A) - [P(A) - P(AB)] - [P(AB) - P(ABC)]$

$= P(ABC) \leq P(D)$

$\Rightarrow P(A) + P(B) + P(C) \leq 2 + P(D)$

证四 由广义加法定理及差化积公式

$$P(A)+P(B)+P(C)=P(A\cup B\cup C)+P(AB)$$

$$+\underline{P(BC)-P(ABC)}+\underline{P(AC)-P(ABC)}+P(ABC)$$

$$\le 1+[P(AB)+\underline{P(\bar{A}BC)}+\underline{P(A\bar{B}C)}]+P(ABC)$$

$$\overset{\text{注}}{\leqslant} 1+[P(A\cup B\cup C)]+P(ABC)$$

$$\le 2+P(ABC)\le 2+P(D)$$

$\boxed{\text{注}}$ $(AB\cup\bar{A}BC\cup A\bar{B}C)\subset(A\cup B\cup C)$

上述各证法用到如下概率性质

- $0 \le P(A) \le 1$ $\quad P(A) = 1 - P(\overline{A})$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

  $P(A \cup B) \le P(A) + P(B)$
- $P(A\overline{B}) = P(A - B) = P(A - AB)$
- $A \subset B \Rightarrow P(A) \le P(B)$

  $P(AB) \le P(A)$ $\quad \overline{AB} = \overline{A} \cup \overline{B}$