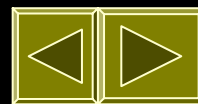


第一章 随机事件及其概率

确定性现象

随机现象 ——

- 每次试验前不能预言出现什么结果
- 每次试验后出现的结果不止一个
- 在相同的条件下进行大量观察或试验时，出现的结果有一定的规律性
—— 称之为**统计规律性**



§ 1.1 随机事件

● 基本术语

对某事物特征进行观察, 统称**试验**.

若它有如下特点, 则称为**随机试验**, 用 E 表示

- 可在相同的条件下重复进行
- 试验结果不止一个, 但能明确所有的结果
- 试验前不能预知出现哪种结果



样本空间—— 随机试验 E 所有可能的结果组成的集合称为**样本空间** 记为 Ω

样本空间的元素, 即 E 的直接结果, 称为**样本点(or基本事件)** 常记为 ω , $\Omega = \{\omega\}$

随机事件 —— Ω 的子集, 记为 A, B, \dots

它是满足某些条件的样本点所组成的集合.



例1 给出一组随机试验及相应的样本空间

E_1 : 投一枚硬币3次, 观察正面出现的次数

$\Omega_1 = \{0, 1, 2, 3\}$ \longrightarrow 有限样本空间

E_2 : 观察总机每天9:00~10:00接到的电话次数

$\Omega_2 = \{0, 1, 2, 3, \dots, N\}$

E_3 : 观察某地区每天的最高温度与最低温度

$\Omega_3 = \{(x, y) \mid T_1 \leq x \leq y \leq T_2\}$ \longrightarrow 无限样本空间

其中 T_1, T_2 分别是该地区的最低与最高温度

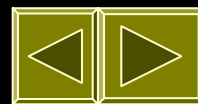


基本事件 —— 仅由一个样本点组成的子集
它是随机试验的直接结果,每次试验必定发生且只可能发生一个基本事件.

随机事件发生 —— 组成随机事件的一个样本点发生

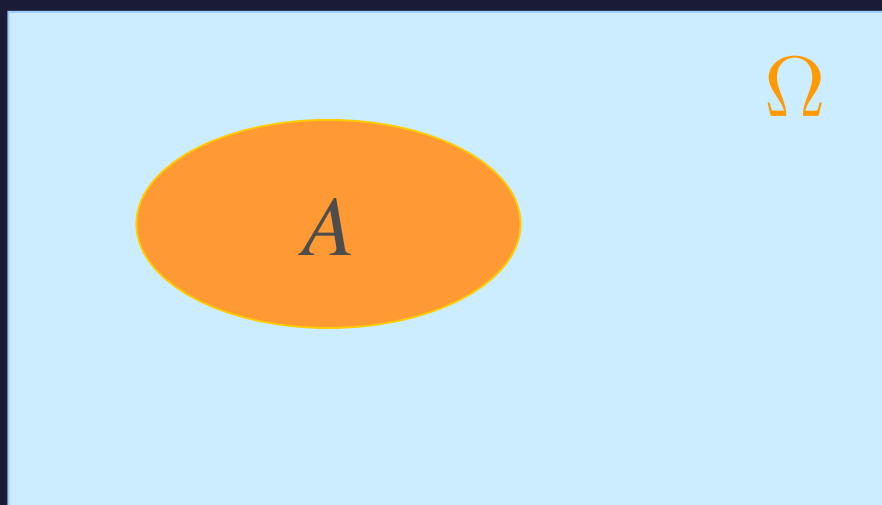
必然事件 —— 全体样本点组成的事件,记为 Ω ,每次试验必定发生的事件.

不可能事件 —— 不包含任何样本点的事件,记为 Φ ,每次试验必定不发生的事件.



● 事件的关系和运算

文氏图 (Venn diagram)



随机事件的关系和运算
雷同集合的关系和运算



1. 事件的包含

$A \subset B$ —— A 包含于 B

\Leftrightarrow 事件 A 发生必
导致事件 B 发生



2. 事件的相等

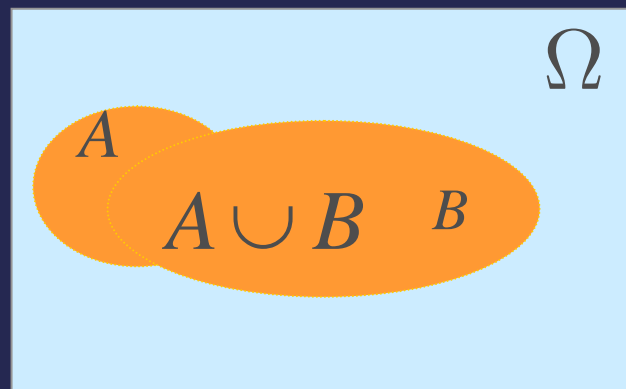
$A = B \Leftrightarrow A \subset B$ 且 $B \subset A$



3. 事件的并(和)

$A \cup B$ 或 $A+B$

—— A 与 B 的和事件



$A \cup B$ 发生

\Leftrightarrow 事件 A 与事件 B 至少有一个发生

A_1, A_2, \dots, A_n 的和事件 —— $\bigcup_{i=1}^n A_i$

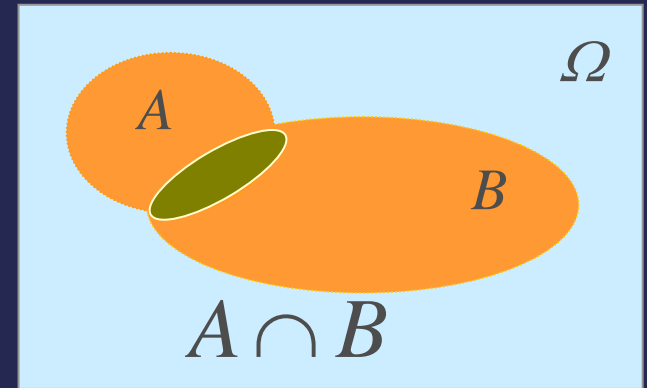
$A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 的和事件 —— $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$



4. 事件的交(积)

$A \cap B$ 或 AB

—— A 与 B 的积事件



$A \cap B$ 发生

\Leftrightarrow 事件 A 与事件 B 同时
发生

A_1, A_2, \dots, A_n 的积事件 —— $\bigcap_{i=1}^n A_i$

$A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 的积事件 —— $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$



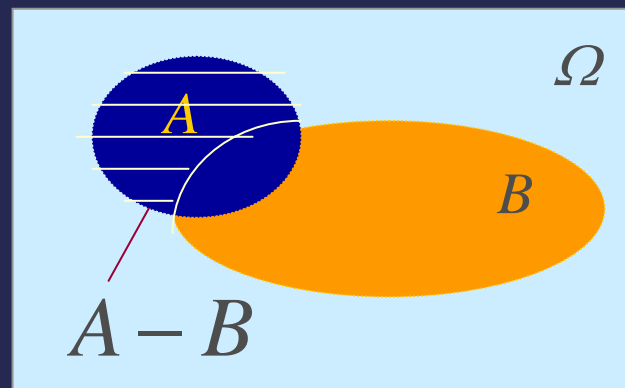
5. 事件的差

$A - B$

—— A 与 B 的差事件

$A - B$ 发生

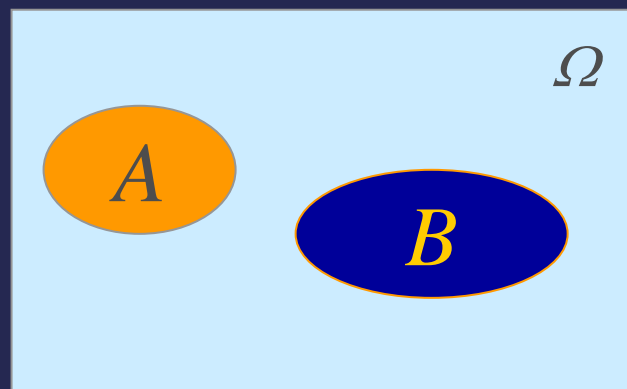
\Leftrightarrow 事件 A 发生，但
事件 B 不发生



6. 事件的互斥 (互不相容)

$AB = \emptyset$ —— A 与 B 互斥

$\Leftrightarrow A, B$ 不可能同时发生



A_1, A_2, \dots, A_n 两两互斥

$\Leftrightarrow A_i A_j = \emptyset, i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, n$

$A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 两两互斥

$\Leftrightarrow A_i A_j = \emptyset, i \neq j, i, j = 1, 2, \dots$

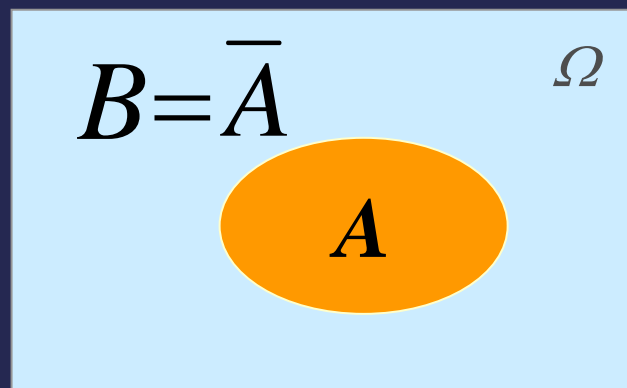


7. 事件的对立

$$AB = \emptyset, A \cup B = \Omega$$

—— A 与 B 互相对立

\Leftrightarrow 每次试验 A 、 B 中
有且只有一个发生



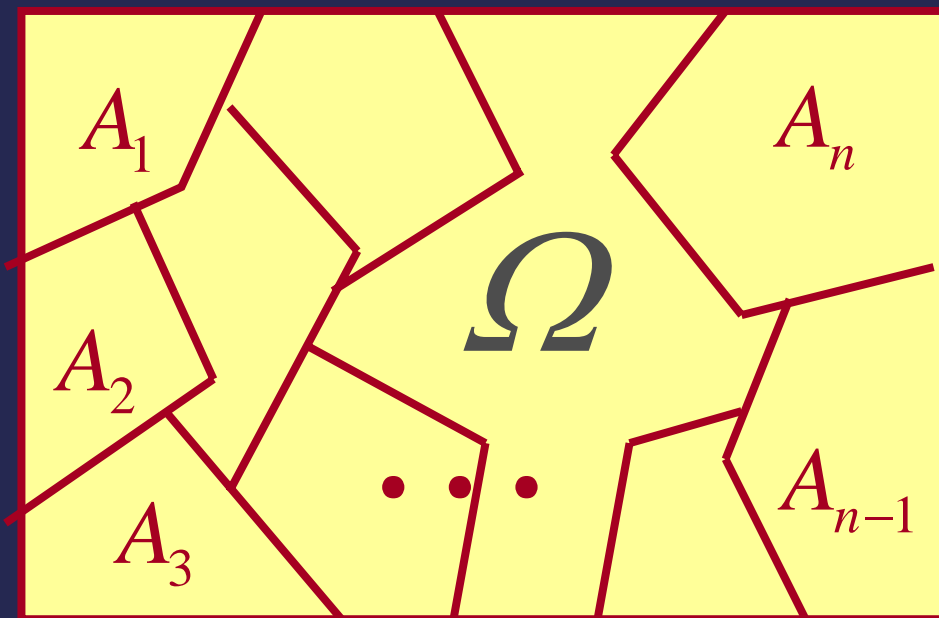
称 B 为 A 的对立事件 (or 逆事件),
记为 $B = \bar{A}$

注意: “ A 与 B 互相对立”与
“ A 与 B 互斥”是不同的概念

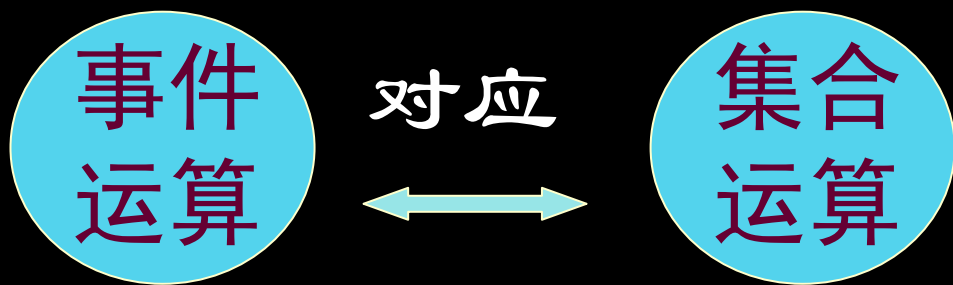


8. 完备事件组

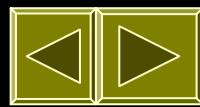
若 A_1, A_2, \dots, A_n 两两互斥, 且 $\Omega = \bigcup_{i=1}^n A_i$
则称 A_1, A_2, \dots, A_n 为完备事件组
或称 A_1, A_2, \dots, A_n 为 Ω 的一个划分



运算律



- 吸收律 $A \cup \Omega = \Omega$ $A \cap \Omega = A$
 $A \cup \emptyset = A$ $A \cap \emptyset = \emptyset$
 $A \cup (AB) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$
- 重余律 $\overline{\overline{A}} = A$
- 幂等律 $A \cup A = A$ $A \cap A = A$
- 差化积 $A - B = A\overline{B} = A - (AB)$



□ 交换律 $A \cup B = B \cup A$ $AB = BA$

□ 结合律 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$$(AB)C = A(BC)$$

□ 分配律 $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

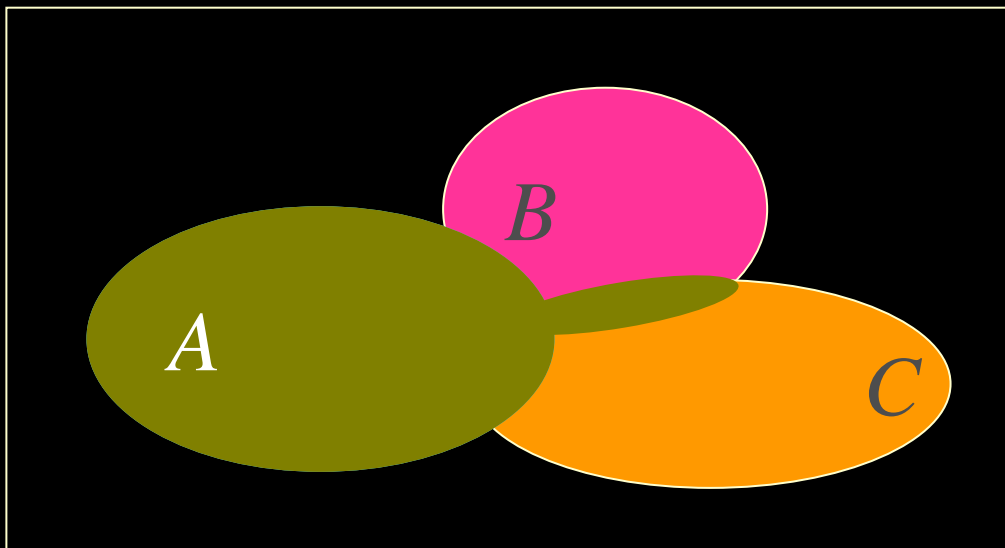
$$A \cup (BC) = (A \cup B)(A \cup C)$$

□ 反演律 $\overline{A \cup B} = \bar{A} \bar{B}$ $\overline{AB} = \bar{A} \cup \bar{B}$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \bigcap_{i=1}^n \bar{A}_i \quad \overline{\bigcap_{i=1}^n A_i} = \bigcup_{i=1}^n \bar{A}_i$$

运算顺序：逆交并差，括号优先

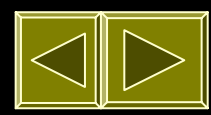
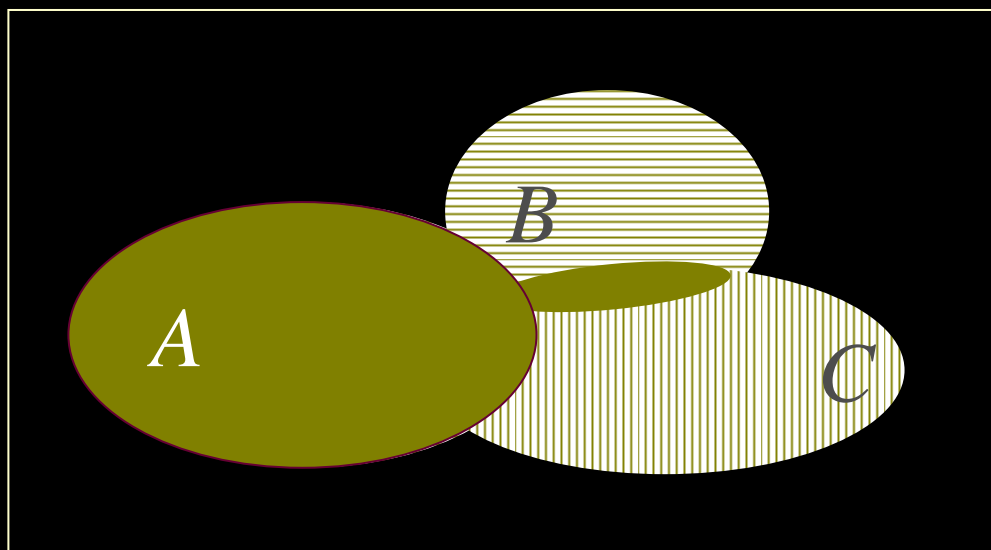




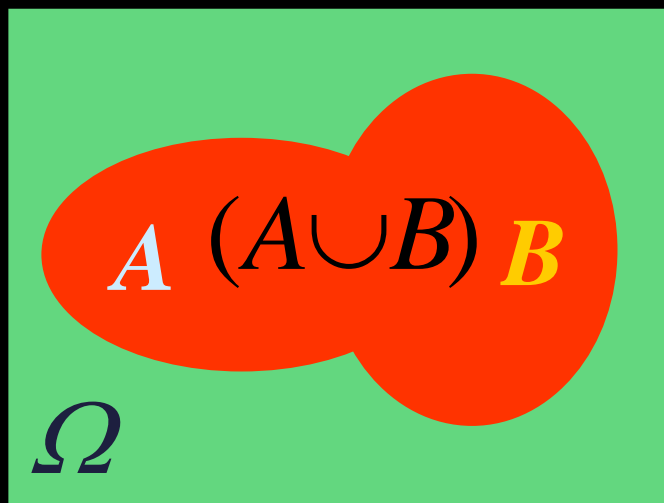
分配律
图示

$$A \cup (B \cap C) =$$

$$(A \cup B) \cap (A \cup C)$$

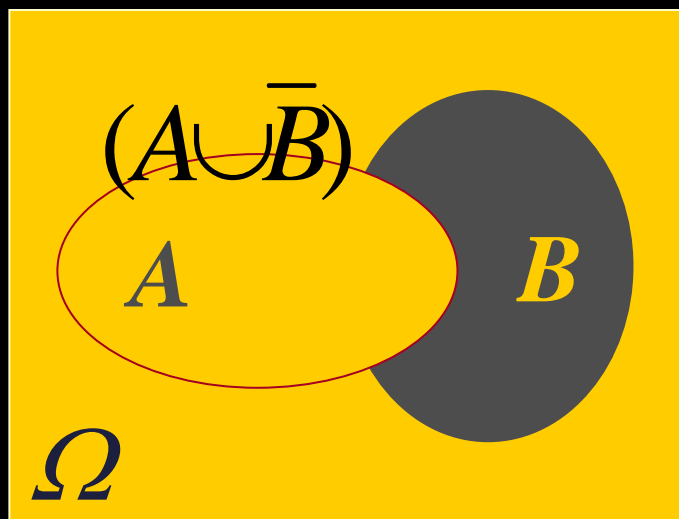


例2 用图示法简化 $(A \cup B)(A \cup \bar{B})$. $AB \neq \Phi$

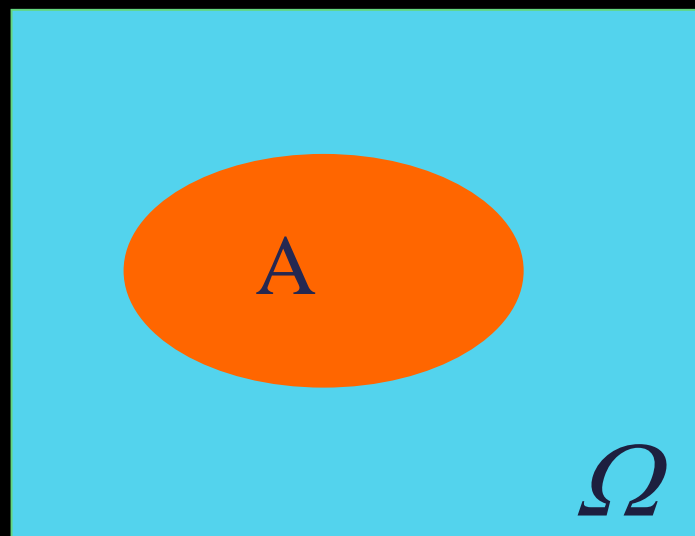


红色
区域

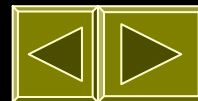
交



黄色
区域



$$\therefore (A \cup B)(A \cup \bar{B}) = A$$



例3 化简事件 $\overline{\overline{AB \cup C} AC}$

解 原式 $= \overline{\overline{AB \cup C} AC} = \overline{\overline{ABC} \cup AC}$

$$= (A \cup B) \overline{C} \cup AC = \overline{A} \overline{C} \cup B \overline{C} \cup AC$$
$$= \overline{A} \overline{C} \cup AC \cup B \overline{C} = A(\overline{C} \cup C) \cup B \overline{C}$$
$$= A\Omega \cup B \overline{C} = A \cup B \overline{C}$$



例4 利用事件关系和运算表达多个事件的关系

A, B, C 都不发生——

$$\overline{A} \overline{B} \overline{C} = \overline{A \cup B \cup C}$$

A, B, C 不都发生——

$$\overline{ABC} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$$

例5 在图书馆中随意抽取一本书，

事件 A 表示数学书，

B 表示中文书，

C 表示精装书。

则

ABC —— 抽取的是精装中文版数学书

$\bar{C} \subset B$ —— 精装书都是中文书

$\bar{A} = B$ —— 非数学书都是中文版的，且
中文版的书都是非数学书



作业: P45 习题一

2 (1) (2) (3) (6) (7) (8)

3

5

6



第1周

问题



在一次乒乓球比赛中设立奖金1千元.比赛规定谁先胜了三盘,谁获得全部奖金.设甲,乙二人的球技相等,现已打了3盘,甲两胜一负,由于某种特殊的原因必须中止比赛.问这1000元应如何分配才算公平?