§1.3 条件概率

条件概率与乘法公式

引例 袋中有7只白球, 3只红球, 白球中有4只木球, 3只塑料球; 红球中有2只木球, 1只塑料球.

现从袋中任取1球, 假设每个球被取到的可能性相同. 若已知取到的球是白球, 问它是木球的概率是多少? ⟶ $\boxed{\text{古典概型}}$

设 A 表示任取一球, 取得白球;

B 表示任取一球, 取得木球.

所求的概率称为在事件A 发生的条件下事件B 发生的**条件概率**。记为 $P(B|A)$

解 列表

	白球	红球	小计
木球	4	2	6
塑球	3	1	4
小计	7	3	10

$$P(B|A)=\frac{4}{7} \qquad \begin{array}{l} 4 \longrightarrow k_{B|A}=4=k_{AB} \\ 7 \longrightarrow n_{\Omega|A}=7=k_A \end{array} \qquad =\frac{P(AB)}{P(A)}$$

从而有

$$P(B|A)=\frac{4}{7}=\frac{k_{AB}}{k_A}=\frac{k_{AB}/n_\Omega}{k_A/n_\Omega}=\frac{4/10}{7/10}=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

定义 设A、B为两事件, $P(A)>0$, 则称 $P(AB)/P(A)$ 为事件 A 发生的条件下事件 B 发生的条件概率，记为

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

条件概率的计算方法

（1） 古 典 概 型 可用缩减样本空间法

（2） 其 他 概 型　用定义与有关公式

条件概率也是概率，故具有概率的性质：

- 非负性 $P(B|A) \geq 0$
- 归一性 $P(\Omega|A) = 1$
- 可列可加性 $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \middle| A\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i|A)$
- $P(B_1 \cup B_2 | A) = P(B_1 | A) + P(B_2 | A) - P(B_1 B_2 | A)$
- $P(\overline{B}|A) = 1 - P(B|A)$
- $P(B_1 - B_2|A) = P(B_1|A) - P(B_1 B_2|A)$

乘法公式

利用条件概率求积事件的概率即**乘法公式**

$$P(AB) = P(A)P(B|A) \quad (P(A) > 0)$$

$$P(AB) = P(B)P(A|B) \quad (P(B) > 0)$$

推广

$$P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$$

$$(P(A_1A_2\cdots A_{n-1}) > 0)$$

例1 (类似于教材P.28 例3)

某厂生产的灯泡能用1000小时的概率为0.8, 能用1500小时的概率为0.4 , 求已用1000小时的灯泡能用到1500小时的概率

解 令 A 灯泡能用到1000小时

B 灯泡能用到1500小时

所求概率为

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}\underset{\substack{\uparrow\\ B\subset A}}{=}\frac{P(B)}{P(A)}=\frac{0.4}{0.8}=\frac{1}{2}$$

例2 从混有5张假钞的20张百元钞票中任意抽出2张, 将其中1张放到验钞机上检验发现是假钞. 求2 张都是假钞的概率.

下面两种解法哪个正确?

解一 令 A 表示"其中1张是假钞".

B表示"2 张都是假钞"

由缩减样本空间法得

$$P(A|B)=4/19=0.2105.$$

解二 令 A 表示"抽到2 张都是假钞".
B表示"2 张中至少有1张假钞" $\Bigg\}\ A\subset B$

则所求概率是 $P(A|B)$（而不是$P(A)$！）.

$$P(AB)=P(A)=C_5^2/C_{20}^2$$

$$P(B)=(C_5^2+C_5^1C_{15}^1)/C_{20}^2$$

所以

$$P(A|B)=P(AB)/P(B)$$

$$=C_5^2/(C_{20}^2+C_5^1C_{15}^1)=10/85=0.118$$

例3 盒中装有5个产品，其中3个一等品，2个二等品，从中不放回地取产品，每次1个，求

（1）取两次，两次都取得一等品的概率;

（2）取两次，第二次取得一等品的概率;

（3）取三次，第三次才取得一等品的概率;

（4）取两次，已知第二次取得一等品，求第一次取得的是二等品的概率.

解 令 A_i 为第 i 次取到一等品

（1） $P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}=\frac{3}{10}$

（2）$P(A_2)=P(\overline{A_1}A_2\cup A_1A_2)=P(\overline{A_1}A_2)+P(A_1A_2)$

$$=\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}+\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}=\frac{3}{5}$$

（2）直接解更简单　$P(A_2)=3/5$

提问：第三次才取得一等品的概率，是

$P(A_3|\overline{A_1}\,\overline{A_2})$ 还是 $P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,A_3)$?

(3) $P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,A_3)=P\left(\overline{A_1}\right)P\left(\overline{A_2}\middle|\overline{A_1}\right)P\left(A_3\middle|\overline{A_1}\,\overline{A_2}\right)$

$$=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{3}=\frac{1}{10}$$

$$(4)\ P\left(\overline{A_1}\,\middle|\,A_2\right)=\frac{P(\overline{A_1}A_2)}{P(A_2)}=\frac{P(A_2)-P(A_1A_2)}{P(A_2)}$$

$$=1-\frac{3/10}{3/5}=0.5$$

一般地

条件概率与无条件概率之间的大小无确定关系

若 $B \subset A$

$$\Rightarrow \underbrace{P(B|A)}_{\text{条件概率}} = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)} \geq \underbrace{P(B)}_{\text{无条件概率}}$$

例4 为了防止意外,矿井内同时装有A与B两种报警设备, 已知设备A单独使用时有效的概率为0.92, 设备B单独使用时有效的概率为0.93, 在设备A失效的条件下, 设备B有效的概率为 0.85, 求发生意外时至少有一个报警设备有效的概率.

解 设事件A, B分别表示设备A, B有效

已知 $P(A)=0.92$ $P(B)=0.93$

$$P(B|\overline{A})=0.85$$

求 $P(A\cup B)$

解 由 $P(B|\overline{A})=\dfrac{P(B)-P(AB)}{1-P(A)}$ 即

$$0.85=\frac{0.93-P(AB)}{0.08} \longrightarrow P(AB)=0.862$$

故 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

$$=0.92+0.93-0.862=0.988$$

解法二

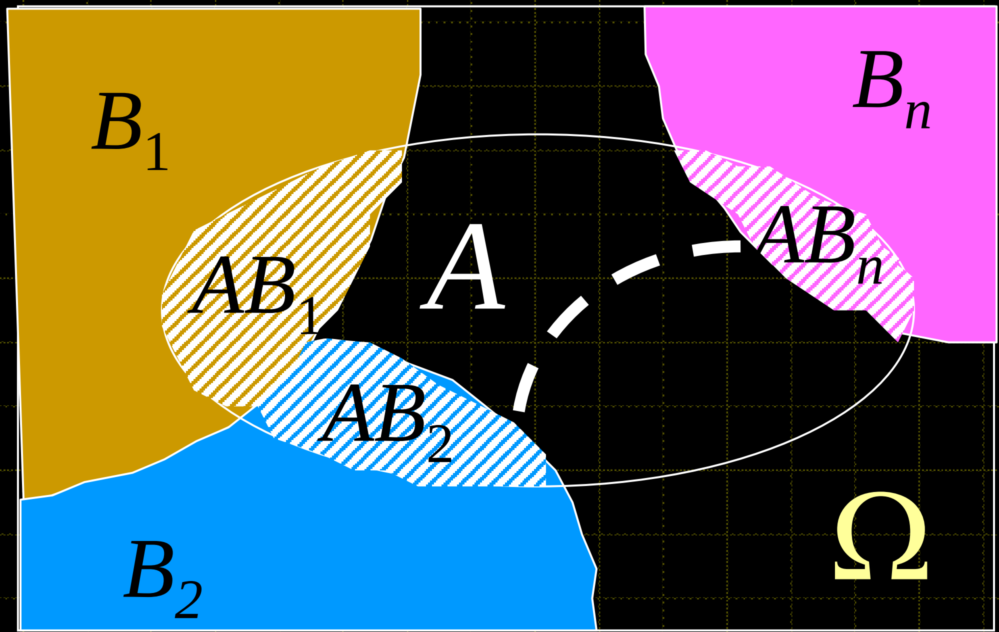
$$P\left(\overline{A\cup B}\right)=P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A})\cdot P(\overline{B}|\overline{A})$$

$$=P(\overline{A})\cdot\left[1-P(B|\overline{A})\right]$$

$$=0.08\cdot[1-0.85]=0.012$$

$$P(A\cup B)=0.988$$

全概率公式与Bayes 公式



$$\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega$$

$$B_i B_j = \Phi$$

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} AB_i$$

$$(AB_i)(AB_j) = \Phi$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(AB_i) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)\cdot P(A|B_i)$$ 全概率公式

$$P(B_k|A) = \frac{P(AB_k)}{P(A)} = \frac{P(B_k)P(A|B_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A|B_i)}$$ Bayes公式

例5 每100件产品为一批，已知每批产品中次品数不超过4件，每批产品中有 i 件次品的概率为

i	0	1	2	3	4
P	0.1	0.2	0.4	0.2	0.1

从每批产品中不放回地取10件进行检验,若发现有不合格产品,则认为这批产品不合格,否则就认为这批产品合格. 求

(1) 一批产品通过检验的概率

(2) 通过检验的产品中恰有 i 件次品的概率

解 设一批产品中有 i 件次品为事件B_i, $i = 0,1$

A 为一批产品通过检验

则 $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_i$,

$B_i B_j = \Phi$, $i \neq j, i, j = 0,1,2,3,4$

已知$P(B_i)$如表中所示，且

$$P(A|B_i) = \frac{C_{100-i}^{10}}{C_{100}^{10}}, \ i = 0,1,2,3,4$$

由全概率公式与Bayes 公式可计算$P(A)$与

$P(B_i|A)$, $i = 0,1,2,3,4$

结果如下表所示

i	0	1	2	3	4
$P(B_i)$	0.1	0.2	0.4	0.2	0.1
$P(A\|B_i)$	1.0	0.9	0.809	0.727	0.652
$P(B_i\|A)$	0.123	0.221	0.397	0.179	0.080

$$P(A)=\sum_{i=0}^{4}P(B_i)P(A|B_i)=0.814$$

$$P(B_i|A)=\frac{P(B_i)P(A|B_i)}{P(A)},\quad i=0,1,2,3,4$$

- 称 $P(B_i)$ 为**先验概率**，它是由以往的经验得到的，它是事件 A 的原因

称 $P(B_i|A)$ $i=0,1,2,3,4$ 为**后验概率**，它是得到了信息 — A 发生，再对导致 A 发生的原因发生的可能性大小重新加以修正

- 本例中，i 较小时，$P(B_i|A) \geq P(B_i)$

  i 较大时，$P(B_i|A) \leq P(B_i)$

例6 由于随机干扰, 在无线电通讯中发出信号"•", 收到信号"•","不清","—" 的概率分别为0.7, 0.2, 0.1; 发出信号"—",收到信号"•","不清","—"的概率分别为0.0, 0.1, 0.9. 已知在发出的信号中, "•"和"—"出现的概率分别为0.6 和 0.4 , 试分析, 当收到信号"不清"时, 原发信号为"•"还是"—"的概率哪个大?

解 设原发信号为"•" 为事件 B_1

原发信号为"—"为事件 B_2

收到信号"不清" 为事件 A

已知: $A \subset B_1 + B_2, \quad B_1 B_2 = \varnothing$

$$P(B_1) = 0.6,\ \ P(B_2) = 0.4$$

$$P(A|B_1) = 0.2,\ \ P(A|B_2) = 0.1$$

$$\Rightarrow P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2)$$

$$= 0.16$$

$$P(B_1|A) = \frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(A)} = \frac{3}{4},$$

$$P(B_2|A) = \frac{P(B_2)P(A|B_2)}{P(A)} = \frac{1}{4}$$

可见, 当收到信号"不清"时, 原发信号为"•"的可能性大

作业 P 47 习题一

25 27 29

31 32

第三周　问题

17世纪,法国的 Chevalies De Mere 注意到在赌博中一对骰子抛25次,把赌注押到 “至少出现一次双六” 比把赌注押到“完全不出现双六”有利. 但他本人找不出原因. 后来请当时著名的法国数学家帕斯卡(Pascal)才解决了这一问题 . 这问题是如何解决的呢?