§ 1.4 事件的独立性

事件的独立性

例1 已知袋中有5只红球, 3只白球. 从袋中有放回地取球两次,每次取1球. 设第 i 次取得白球为事件 A_i (i =1, 2). 求

$$P(A_1), \quad P(A_2), \quad P(A_2 | A_1), \quad P(A_2 | \overline{A_1}),$$

解 $P(A_1) = 3/8 = P(A_2)$, $\quad P(A_2 | \overline{A_1}) = 3/8$,

$P(A_2 | A_1) = 3/8$,

$$\Longrightarrow \quad P(A_2 | A_1) = P(A_2) = P(A_2 | \overline{A_1})$$

事件 A_1 发生与否对 A_2 发生的概率没有影响可视为事件A_1与A_2相互独立

$$\Longrightarrow P(A_1A_2)=(3/8)^2=P(A_1)P(A_2|A_1)=P(A_1)P(A_2)$$

定义 设 A,B 为两事件，若

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

则称事件 A 与事件 B 相互独立

两事件相互独立的性质

- 两事件 A 与 B 相互独立是相互对称的
- 若 $P(A)>0,$ 则 $P(B)=P(B|A)$

  若 $P(B)>0,$ 则 $P(A)=P(A|B)$

- 若 $P(A)>0,\ P(B)>0,$

  则“事件 A 与 事件 B 相互独立”和

  “事件 A 与 事件 B 互斥”

  不能同时成立 (自行证明)

- 四对事件 $A,B;\quad A,\overline{B};\quad \overline{A},B;\quad \overline{A},\overline{B}$

任何一对相互独立，则其它三对也相互独立

试证其一 $A,\overline{B}$ 独立 $\Rightarrow A,B$ 独立

事实上

$$P(AB)=P(A-A\overline{B})=P(A)-P(A\overline{B})$$

$$=P(A)-P(A)P(\overline{B})$$

$$=P(A)\left[1-P(\overline{B})\right]=P(A)P(B)$$

定义 三事件 A, B, C 相互独立是指下面的关系式同时成立：

$$\begin{cases} P(AB) = P(A)P(B) \\ P(AC) = P(A)P(C) \\ P(BC) = P(B)P(C) \end{cases} \quad (1)$$

$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C) \quad (2)$$

注：1) 关系式(1) (2)不能互相推出

2)仅满足(1)式时,称 A, B, C 两两独立

A, B, C 相互独立 $\longrightarrow$ A, B, C 两两独立

例2 有一均匀的八面体，各面涂有颜色如下

1	2	3	4	5	6	7	8
R	R	R	R				
W	W	W		W			
Y					Y	Y	Y

将八面体向上抛掷一次，观察向下一面出现的颜色。

设事件 $\begin{cases} R \text{ —— 红色} \\ W \text{ —— 白色} \\ Y \text{ —— 黄色} \end{cases}$

则 $$P(R)=P(W)=P(Y)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

$$P(RW)=\frac{3}{8},\quad P(WY)=P(RY)=\frac{1}{8}$$

$$P(RWY)=\frac{1}{8}=P(R)P(W)P(Y)$$

但 $$P(RW)\neq P(R)P(W)$$

$$P(WY)\neq P(W)P(Y)$$

$$P(RY)\neq P(R)P(Y)$$

本例说明不能由关系式(2)推出关系式(1)

例3 随机投掷编号为 1 与 2 的两个骰子

事件 A 表示1号骰子向上一面出现奇数

B 表示2号骰子向上一面出现奇数

C 表示两骰子出现的点数之和为奇数

则 $$P(A)=P(B)=P(C)=1/2$$

$$P(AB)=P(BC)=P(CA)=1/4$$

$$=P(A)P(B)=P(B)P(C)=P(C)P(A)$$

但 $$P(ABC)=0\neq 1/8=P(A)P(B)P(C)$$

本例说明 不能由 A, B, C 两两独立

$\longrightarrow$ A, B, C 相互独立

定义 n 个事件 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 相互独立是指下面的关系式同时成立

$$P(A_iA_j) = P(A_i)P(A_j),\ 1 \le i < j \le n$$

$$P(A_iA_jA_k) = P(A_i)P(A_j)P(A_k),\ 1 \le i < j < k \le n$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)$$

常由实际问题的意义
判断事件的独立性

例4 已知事件 A, B, C 相互独立,证明事件 $\overline{A}$ 与 $B\cup C$ 也相互独立

证

$$P\left(\overline{A}(B\cup C)\right)=P(B\cup C)-P\left(A(B\cup C)\right)$$

$$=\left[P(B)+P(C)-P(BC)\right]$$

$$-\left[P(AB)+P(AC)-P(ABC)\right]$$

$$=P(\overline{A})\left[P(B)+P(C)-P(BC)\right]$$

$$=P(\overline{A})P(B\cup C)$$

命题

- 若 n 个事件 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 相互独立,将这 n 个事件任意分成 k 组,同一个事件不能同时属于两个不同的组,则对每组的事件进行求和、积、差、对立等运算所得到的 k 个事件也相互独立.

利用独立事件的性质
计算其并事件的概率

若 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 相互独立，则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=1-\prod_{i=1}^{n}(1-P(A_i))$$

$$\begin{aligned}P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) &= P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \\ &= 1-P(\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n}) \\ &= 1-P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\cdots\overline{A_n}) = 1-\prod_{i=1}^{n} P(\overline{A_i}) \\ &= 1-\prod_{i=1}^{n}(1-P(A_i))\end{aligned}$$

特别， 当 $P(A_i) = p$， 则

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = 1 - (1 - p)^n$$

例5 设每个人的血清中含肝炎病毒的概率为0.4%, 求来自不同地区的100个人的血清混合液中含有肝炎病毒的概率

解 设这100 个人的血清混合液中含有肝炎病毒为事件 A, 第 i 个人的血清中含有肝炎病毒为事件 A_i $\quad i=1,2,\ldots,100$

则 $A=\bigcup\limits_{i=1}^{100} A_i$

$$P(A)=1-\prod_{i=1}^{100}\left[1-P(A_i)\right]=1-(1-0.004)^{100}\approx 0.33$$

若B_n 表示 n 个人的血清混合液中含有肝炎病毒，则

$$P(B_n)=1-(1-\varepsilon)^n, \qquad 0<\varepsilon<1$$

$$n=1,2,\cdots$$

$$\lim_{n\to\infty} P(B_n)=1$$

—— 不能忽视小概率事件，

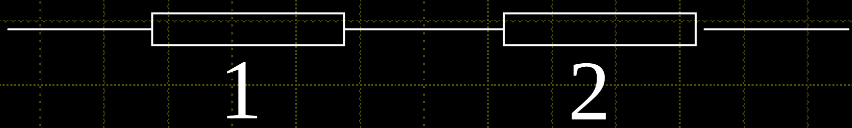
小概率事件迟早要发生

例6　系统的可靠性问题 (教材P.40例5)

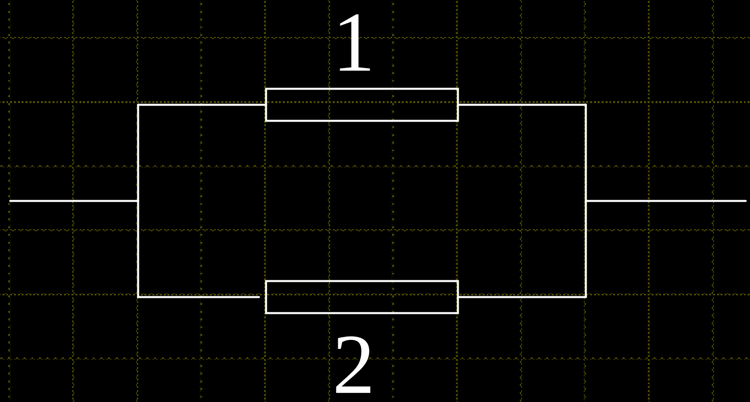
一个元件(或系统)能正常工作的概率称为元件(或系统)的可靠性

系统由元件组成, 常见的元件连接方式:

串联

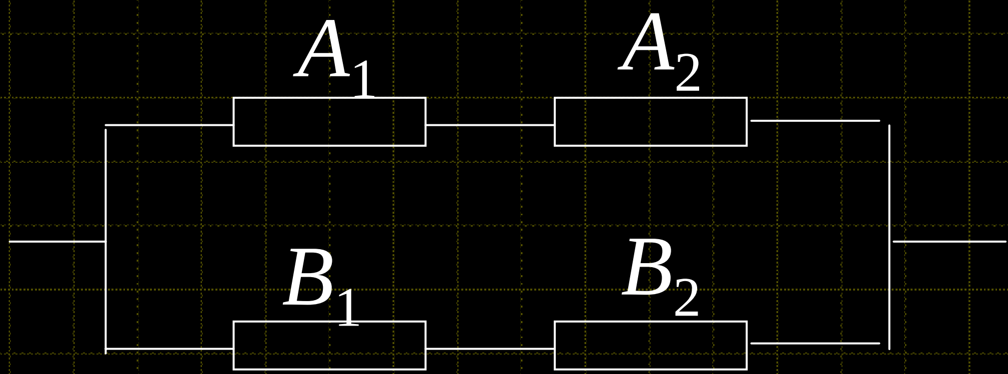


并联



设 两系统都是由 4 个元件组成,每个元件正常工作的概率为 p, 每个元件是否正常工作相互独立.两系统的连接方式如下图所示,比较两系统的可靠性.

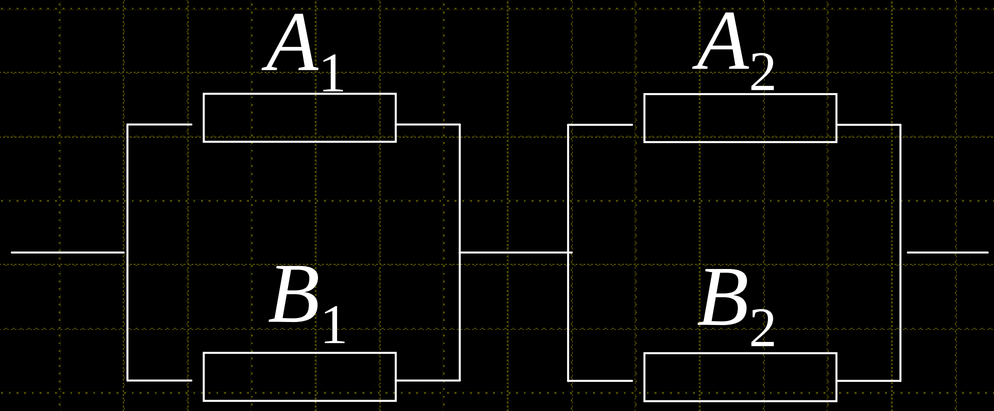
S_1:



$$P(S_1) = P(A_1A_2) + P(B_1B_2) - P(A_1A_2B_1B_2)$$

$$= 2p^2 - p^4 = p^2(2 - p^2)$$

S_2:



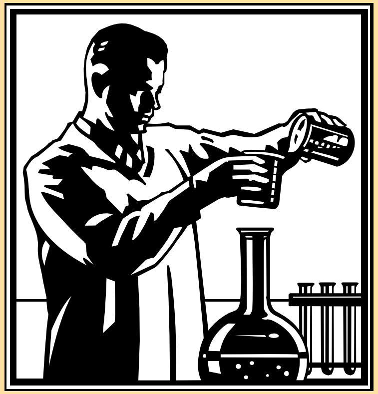
$$P(S_2)=\prod_{i=1}^{2}P(A_i\cup B_i)=\left(2p-p^2\right)^2$$

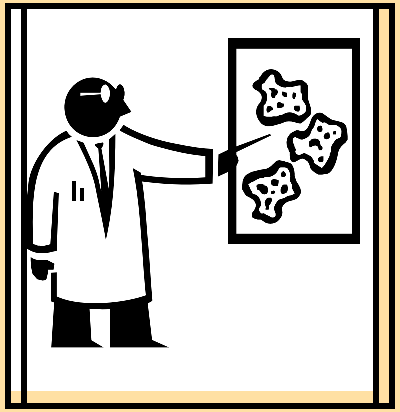
$$=p^2(2-p)^2\ge p^2(2-p^2)=P(S_1).$$

注 利用导数可证，当 $p\in(0,1)$ 时，恒有

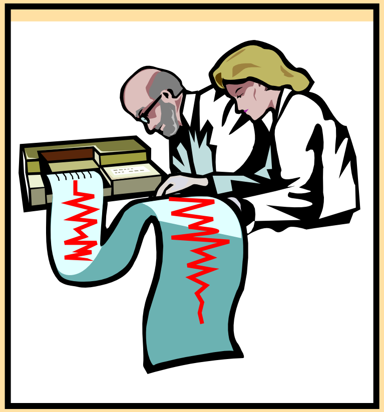
$$f(p)=(2-p)^2-(2-p^2)>0$$

公 Bayes 式





在医学上的应用



应用举例 —— 肠癌普查

设事件A_i表示第 i 次检查为阳性,事件B表示被查者患肠癌,已知肠镜检查效果如下:

$$P(A_i|B)=P(\overline{A_i}|\overline{B})=0.95,\ 且P(B)=0.005$$

某患者首次检查反应为阳性, 试判断该患者是否已患肠癌? 若三次检查反应均为阳性呢?

由Bayes 公式得

$$P(B|A_1)=\frac{P(B)P(A_1|B)}{P(B)P(A_1|B)+P(\overline{B})P(A_1|\overline{B})}$$

$$=\frac{0.005\times 0.95}{0.005\times 0.95+0.995\times 0.05}$$

$$\approx 0.087.$$

首次检查反应为阳性
患肠癌的概率并不大

$$P(B \mid A_1 A_2)$$

$$= \frac{P(B)P(A_1 A_2 \mid B)}{P(B)P(A_1 A_2 \mid B) + P(\bar{B})P(A_1 A_2 \mid \bar{B})}$$

$$= \frac{P(B)P(A_1 \mid B)P(A_2 \mid B)}{P(B)P(A_1 \mid B)P(A_2 \mid B) + P(\bar{B})P(A_1 \mid \bar{B})P(A_2 \mid \bar{B})}$$

$$= \frac{0.005 \times 0.95^2}{0.005 \times 0.95^2 + 0.995 \times 0.05^2} \approx 0.6446$$

接连两次检查为阳性
患肠癌的可能性过半

两次检查反应均为阳性,还不能断定患者已患肠癌.

$$P(B|A_1A_2A_3)=\frac{0.005\times0.95^3}{0.005\times0.95^3+0.995\times0.05^3}$$

$$\approx 0.9718$$

连续三次检查为阳性
几乎可断定已患肠癌

作业 P49 习题一

35　　37

38　　40

补充作业题

某型号火炮的命中率为0.8, 现有一架敌机即将入侵，如果欲以 99.9 % 的概率击中它，则需配备此型号火炮多少门?

补充作业题解答

设需配备 n 门此型号火炮

设事件 A_i 表示第 i 门火炮击中敌机

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = 1 - [1 - P(A_i)]^n = 1 - 0.2^n > 0.999$$

$$n > \frac{\ln 0.001}{\ln 0.2} \approx 4.29$$

故需配备 5 门此型号火炮.

伯努利试验概型

n 重伯努利 (Bernoulli) 试验概型:

- 试验可重复 n 次
- 每次试验只有两个可能的结果: $A, \overline{A}$
  且 $P(A)=p,\quad 0<p<1$
- 每次试验的结果与其他次试验无关——称为这 n 次试验是相互独立的

n重Bernoulli试验中事件 A 出现 k 次的概率 记为 $P_n(k)$

例7 袋中有3个白球,2个红球,有放回地取球4 次,每次一只,求其中恰有2个白球的概率.

解 古典概型

设 B 表示4个球中恰有2个白球

$n_{\Omega}=5^4$ $\quad n_B = C_4^2 3^2 2^2$

$$P(B)=\frac{C_4^2 3^2 2^2}{5^4}=C_4^2\left(\frac{3}{5}\right)^2\left(\frac{2}{5}\right)^2=0.3456.$$

解二 每取一个球看作是做了一次试验

记取得白球为事件 A， $P(A)=3/5.$

有放回地取4个球看作做了 4 重Bernoulli 试验, 记第 i 次取得白球为事件 A_i

感兴趣的问题为:4次试验中A 发生2次的概率

$$A_1A_2\overline{A_3}\,\overline{A_4} \qquad A_1\overline{A_2}A_3\overline{A_4} \qquad A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}A_4$$

$$\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3A_4 \qquad \overline{A_1}A_2\overline{A_3}A_4 \qquad \overline{A_1}A_2A_3\overline{A_4}$$

$$\longrightarrow \quad P(B)=C_4^2\left(\frac{3}{5}\right)^2\left(\frac{2}{5}\right)^2=0.3456.$$

一般地，若 $P(A)=p,\ 0<p<1$

则 $P_n(k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k},\quad k=0,1,2,\cdots,n$

例8 八门炮同时独立地向一目标各射击一发炮弹,若有不少于2发炮弹命中目标时,目标就被击毁.如果每门炮命中目标的概率为 0.6, 求目标被击毁的概率.

解 设 i 门炮击中目标为事件A_i, i=2~8, 设目标被击毁为事件B, 各炮命中概率 $p=0.6$, 则

$$P(B)=P(\bigcup_{i=2}^{8}A_i)=\sum_{i=2}^{8}P(A_i)=\sum_{i=2}^{8}P_8(i)=1-\sum_{i=0}^{1}P_8(i)$$

$$=1-\sum_{i=0}^{1}C_8^i 0.6^i 0.4^{8-i}=0.9914$$

作业 P.50 习题一

41　43　44

第 4 周 问 题

某市进行艺术体操赛, 需设立两个裁判组, 甲组3名,乙组1名. 但组委会只召集到3名裁判, 由于临近比赛, 便决定调一名不懂行的人参加甲组工作, 其中两裁判独立地以概率 p 作出正确裁定,而第三人以掷硬币决定, 最后根据多数人的意见决定. 乙组由 1 个人组成, 他以概率 p 做出正确裁定. 问哪一组做出正确裁定的概率大 ?

伯努利

Jacob Bernoulli

1654-1705

瑞士数学家

概率论的奠基人

伯努利 (Jacob Bernoulli)简介

伯努利家属祖孙三代出过十多位数学家. 这在世界数学史上绝无仅有.

伯努利幼年遵从父亲意见学神学,当读了 R· 笛卡尔的书后,顿受启发,兴趣转向数学.

1694年,首次给出直角坐标和极坐标下的曲率半径公式,同年关于双纽线性质的论文,使伯努利双纽线应此得名.

1695年提出著名的伯努利方程

$$dx/dy = p(x)y + q(x)y^n$$

此外对对数螺线深有研究，发现对数螺线经过各种变换后，结果还是对数螺线，在惊叹此曲线的奇妙之余，遗言把对数螺线刻在自己的墓碑上，并附以颂词：

纵使变化，依然故我

1713年出版的巨著《推测术》, 是组合数学及概率史的一件大事. 书中给出的伯努利数、伯努利方程、伯努利分布等, 有很多应用, 还有伯努利定理, 这是大数定律的最早形式.

附　　录

杂例 从 1,2,$\cdots$,10 十个数字中有放回地任取 5个数字, 求取出的5个数字按由小到大排列, 中间的那个数等于 4 的概率.

解 设取出的5个数按由小到大排列为

$$x_1 \le x_2 \le x_3 \le x_4 \le x_5$$

令$(x_3 = 4)$表示所求的事件

$$(x_3 = 4) = (x_3 \le 4) - (x_3 \le 3)$$

$(x_3 \le 4)$: 1,1,2,3,3; 1,1,2,3,4;

1,1,4,4,5; 1,1,4,5,8; … …

所取5个数字中至少有3个数字不大于4

令 A_k 表示所取5个数字中恰有 k 个不大于4

则 $$P(A_k)=C_5^k\left(\frac{4}{10}\right)^k\left(\frac{6}{10}\right)^{5-k}$$

$$(x_3 \le 4)=\bigcup_{k=3}^{5} A_k \quad A_k A_m=\varnothing,\ \ k\ne m$$

$$\longrightarrow \quad P(x_3 \le 4) = \sum_{k=3}^{5} P(A_k)$$

$$= \sum_{k=3}^{5} C_5^k \left(\frac{4}{10}\right)^k \left(\frac{6}{10}\right)^{5-k}$$

由于$(x_3 \le 3) \subset (x_3 \le 4) \longrightarrow$

$$P(x_3 = 4) = P(x_3 \le 4) - P(x_3 \le 3)$$

$$= \sum_{k=3}^{5} C_5^k \left(\frac{4}{10}\right)^k \left(\frac{6}{10}\right)^{5-k} - \sum_{k=3}^{5} C_5^k \left(\frac{3}{10}\right)^k \left(\frac{7}{10}\right)^{5-k}$$

$$= 0.1544 .$$