《概率统计》第二章习题课

2-4 （1）$P(X=k)=\frac{3}{4}(\frac{1}{4})^{k-1}$ → 这仅是一个概率不是所求分布！

X	1	2	…	n
P	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{16}$	…	$\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\frac{3}{4}$

这也不是分布归一性不成立

正确解

$$P(X=k)=\frac{3}{4}(\frac{1}{4})^{k-1}, \qquad k=1,2,\cdots$$

（2） $P(X=2n)=\frac{3}{4}\cdot\frac{1/4}{1-1/16}=\frac{1}{5}$

第一等式不成立！

正确解

$$P(X\text{取偶数})=\sum_{n=1}^{\infty}P(X=2n)=\frac{3}{4}\cdot\frac{1/4}{1-1/16}=\frac{1}{5}$$

或

$$P_{\text{偶}}=\frac{3}{4}\lim_{n\to\infty}[1/4+(1/4)^3+\cdots(1/4)^{2n-1}]$$

$$=\frac{3}{4}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{4}\right)^{2n-1}\cdot\frac{1}{16}}{1-\frac{1}{16}}=\frac{1}{5}$$

几何分布及适用场合

设每次试验成功的概率为 p, 则首次成功所需试验次数服从参数为 p 的几何分布:

$$P(X=k)=p(1-p)^{k-1}, \qquad k=1,2,\cdots$$

2−6

X	2	3	4
P	0.3	0.4	0.3

$$F(x) = \begin{cases} 0.3 & x = 2 \\ 0.7 & x = 3 \\ 1 & x = 4 \\ 0 & x < 2 \\ 0 & x > 4 \end{cases}$$

正确解

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<2 \\ 0.3, & 2\le x<3 \\ 0.7, & 3\le x<4 \\ 1, & x\ge 4 \end{cases}$$

2-18 (3)

解 $F(x)\overset{?}{=}\begin{cases} 1/2+(1/\pi)\arcsin x, & |x|<1 \\ 0, & |x|\geq 1 \end{cases}$

$F(+\infty)=1$ 不满足！

正确解为

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<-1 \\ 1/2+(1/\pi)\arcsin x, & -1\leq x<1 \\ 1, & x\geq 1 \end{cases}$$

2-33(2)

$$x = h(y) = \pm\sqrt{(y-1)/2}$$

当 $y > 1$ 时

$$f_Y(y) \overset{?}{=} f_X[h(y)]\left|h'(y)\right| = \frac{1}{4\sqrt{\pi}\sqrt{y-1}} e^{-\frac{y-1}{4}}$$

错误原因

$y = 2x^2 + 1$ 不严格单调！

正确解 $x_{1,2} = \pm\sqrt{(y-1)/2}$

当 $y > 1$ 时

$$f_Y(y) = f_X(x_1)\left|x_1'\right| + f_X(x_2)\left|x_2'\right|$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{\pi}\sqrt{y-1}} e^{-\frac{y-1}{4}} + \frac{1}{4\sqrt{\pi}\sqrt{y-1}} e^{-\frac{y-1}{4}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{y-1}} e^{-\frac{y-1}{4}}$$

2-33(3) $x = \pm y$ 当 $y > 0$ 时

$$f_Y(y) \overset{?}{=} f_X[h(y)]\left|h'(y)\right|$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\pm y)^2}{2}} \left|(\pm 1)\right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$$

正确解 $x_{1,2} = \pm y$ 当 $y > 0$ 时

$$f_Y(y) = f_X(x_1)\left|x_1'\right| + f_X(x_2)\left|x_2'\right|$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(+y)^2}{2}} \cdot \left|+1\right| + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(-y)^2}{2}} \cdot \left|-1\right|$$

所以

$$f_Y(y)=\begin{cases}\sqrt{2}e^{-\frac{y^2}{2}}/\sqrt{\pi}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$$

2−35

解 $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(-3X+2\le y)$

$=P(X\ge\frac{2-y}{3})=1-P(X<\frac{2-y}{3})$

因为X未必连续

$\overset{?}{=}1-F(\frac{2-y}{3})$ 书后答案错！

解 $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(-3X+2\le y)$

$$=P\left(X\ge\frac{2-y}{3}\right)=1-P\left(X<\frac{2-y}{3}\right)$$

$$\overset{?}{=}1-\int_{-\infty}^{\frac{2-y}{3}}F'(x)dx=1-F(x)\Big|_{-\infty}^{\frac{2-y}{3}}$$

$$=1-F\left(\frac{2-y}{3}\right)$$

X 未必连续, 故未必有概率密度函数

Eˌ(x) = ţ(x)

正确解为

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(-3X + 2 \le y)$$

$$= P(X \ge \frac{2-y}{3}) = 1 - P(X < \frac{2-y}{3})$$

$$= 1 - P(X \le \frac{2-y}{3}) + P(X = \frac{2-y}{3})$$

$$= 1 - F(\frac{2-y}{3}) + F(\frac{2-y}{3}) - F(\frac{2-y}{3} - 0)$$

$$= 1 - F(\frac{2-y}{3} - 0)$$

2-36

解

$$F_Y(y)=\int_{-\infty}^{y} f_Y(y)dy \overset{?}{=} \int_{-\infty}^{y} dy \overset{?}{=} \begin{cases} 0 & y<0 \\ y & 0\le y\le 1 \\ 1 & y>1 \end{cases}$$

$$F_Y(y)=P(F(X)\le y) \overset{?}{=} \int_{-\infty}^{y} f(x)dx$$

$$=F(x)\Big|_{-\infty}^{y}=F(y)$$

当 $0<y\le 1$ 时,

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(F(X)\le y)$$

$$\overset{?}{=}P(X\le F^{-1}(y))=F(F^{-1}(y))=y$$

当 $y\le 0$ 时,

$$F_Y(y)=P(F(X)\le y)=P(\Phi)=0$$

当 $y>1$ 时,

$$F_Y(y)=P(F(X)\le y)=P(\Omega)=1$$

X 的分布函数为 $F_Y(y)=\begin{cases} 0 & y \le 0 \\ y & 0 < y \le 1 \\ 1 & y > 1 \end{cases}$

正确的解为

当 $0<y\le1$ 时,

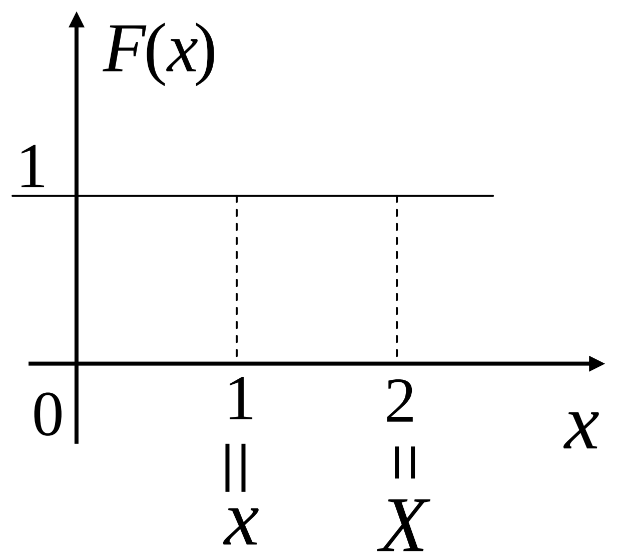
$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(F(X)\le F(x))$$

$$=P(X\le x)=F(x)=y$$

有同学说下面等式不成立

① $P(F(X) \le F(x)) = P(X \le x)$ ②

反例 $F(x)=1$



反例不存在！

①⇒② F 的定义 $F(x)=P(X\le x)$

①⇐② F 的性质(单调不减)