随机变量及其分布

第二章

为更好地揭示随机现象的规律性并利用数学工具描述其规律，有必要引入随机变量来描述随机试验的不同结果.

例 检测一件产品可能出现的两个结果，也可以用一个离散变量来描述

$$X(\omega)=\begin{cases}1, & \text{次品}\\ 0, & \text{正品}\end{cases}$$

例 电脑寿命可用一个连续变量 T 来描述.

§ 2.1 随机变量及其分布函数

随机变量 (random variable)

定义 设 Ω 是试验E的样本空间, 若

$$\forall \omega \in \Omega \xrightarrow{\text{按一定法则}} \exists \text{ 实数} X(\omega)$$

则称 $X(\omega)$ 为 Ω 上的 随机变量

简记 r.v. X .

r.v.一般用大写字母 $X, Y, Z, \ldots$ 或小写希腊字母 ξ, η, ζ 表示.

随机变量 是 $\Omega \to R$ 上的映射，

此映射具有如下特点

- <u>定义域</u>　事件域 Ω
- <u>随机性</u>　r.v. X 的可能取值不止一个，试验前只能预知它的可能的取值，但不能预知取哪个值
- <u>概率特性</u>　X 以一定的概率取某个值

- 引入r.v.后，可用r.v.的等式或不等式表达随机事件，例如

  $(X > 100)$ —— 表示“某天9:00 ~ 10:00 接到电话次数超过100次”这一事件

- r.v.的函数一般也是r.v.

- 可根据随机事件定义 r.v.

  设 A 为随机事件，则称

  $$X_A = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \in \overline{A} \end{cases}$$

  为事件A 的示性变量

- 在同一个样本空间可以同时定义多个 r.v., 例如

$$\Omega = \{\text{儿童的发育情况}\ \omega\}$$

$X(\omega)$ — 身高,

$Y(\omega)$ — 体重,

$Z(\omega)$ — 头围.

各 r.v.之间可能有一定的关系, 也可能没有关系——即 相互独立

r.v. 分类

- 离散型
- 非离散型

其中一种重要的类型为
连续性 r.v.

引入 r.v. 重要意义

- ◇ 任何随机现象可被 r.v.描述
- ◇ 借助微积分方法将讨论进行到底

随机变量的分布函数

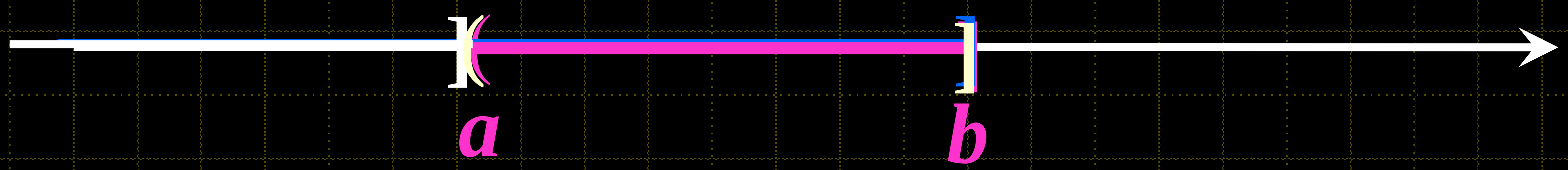
定义 设 X 为 r.v., x 是任意实数,称函数

$$F(x) = P(X \le x), \quad -\infty < x < +\infty$$

为 X 的分布函数.

用分布函数计算 X 落在$(a, b]$里的概率:

$$P(a < X \le b) = P(X \le b) - P(X \le a)$$
$$= F(b) - F(a)$$



分布函数的性质

- $F(x)$ 单调不减，即

$$\forall\ x_1 < x_2,\ F(x_1) \le F(x_2)$$

- $0 \le F(x) \le 1$ 且

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1,\ \lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$$

- $F(x)$ 右连续，即

$$F(x+0) \overset{\triangle}{=} \lim_{t\to x+0} F(t) = F(x)$$

用分布函数表示概率

$$P(a < X \le b) = F(b) - F(a)$$

$$P(X > a) = 1 - P(X \le a) = 1 - F(a)$$

$$P(X = a) = F(a) - F(a-0)$$

请填空

$$\begin{cases} P(a \le X \le b) = \underline{F(b) - F(a-0)} \\ P(a < X < b) = \underline{F(b-0) - F(a)} \\ P(a \le X < b) = \underline{F(b-0) - F(a-0)} \end{cases}$$

例1 设 r.v. X 的分布函数:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ x+1/3 & 0\le x<1/2 \\ 1 & x\ge 1/2 \end{cases}$$

计算 $P(X=0)$ $P(X=1/4)$ $P(X\ge 1/4)$

$P(0<X\le 1/3)$ $P(0\le X\le 1/3)$

解 $P(X=0)=F(0)-F(0-0)$

$$=1/3-0=1/3;$$

$$P(X=1/4)=F(1/4)-F(1/4-0)$$
$$=7/12-7/12=0;$$

$$P(X\geq 1/4)=P(X=1/4)+P(X>1/4)$$
$$=P(X=1/4)+1-F(1/4)=5/12;$$

$$P(0<X\leq 1/3)=F(1/3)-F(0)=1/3;$$

$$P(0\leq X\leq 1/3)=P(X=0)+P(0<X\leq 1/3)$$
$$=1/3+1/3=2/3.$$

本节结束