§2.3 连续型随机变量

连续型 r.v.的概念

定义 设 X 是随机变量，若存在一个非负可积函数 $f(x)$，使得

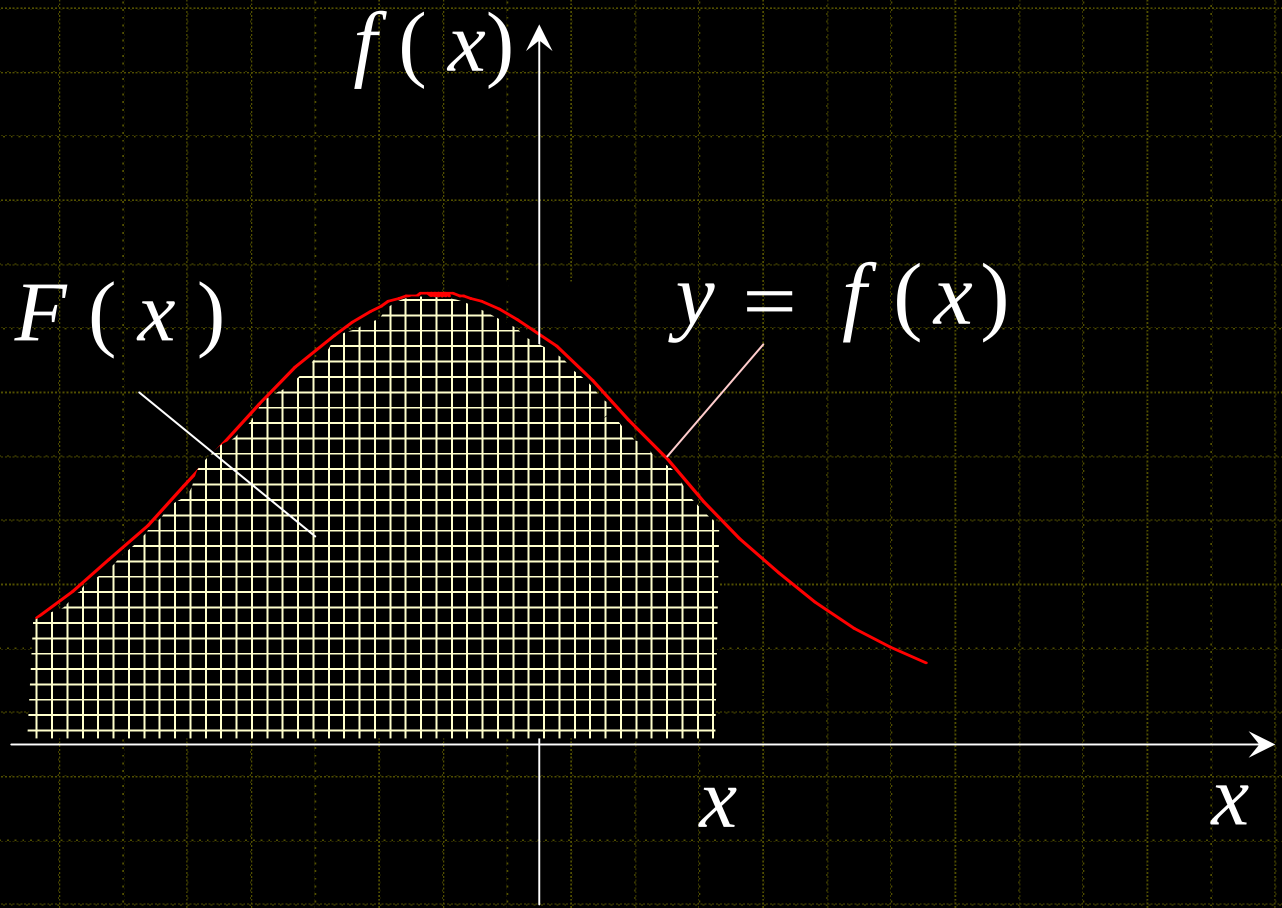
$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t \qquad -\infty < x < +\infty$$

其中 $F(x)$ 是它的分布函数

则称 X 是 **连续型 r.v.**，$f(x)$ 是它的**概率密度函数(p.d.f.)**，简记为 ***d.f.***

分布函数与密度函数

几何意义



p.d.f. $f(x)$的性质

- $f(x) \ge 0$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = F(+\infty) = 1$

常利用这两个性质检验一个函数能否作为连续性 *r.v.*的 *d.f.*

- 在 $f(x)$ 的连续点处，

$$f(x) = F'(x)$$

$f(x)$ 描述了X 在 x 附近单位长度的区间内取值的概率

积分 $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t \quad -\infty < x < +\infty$

不是Cauchy 积分，而是Lesbesgue 意义下的积分，所得的变上限的函数是绝对连续的，因此几乎处处可导

$$F'(x_0)=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{F(x_0+\Delta x)-F(x_0)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{P(x_0<X\le x_0+\Delta x)}{\Delta x}=f(x_0)$$

$$\underbrace{f(x_0)}_{\text{密度}}\,\underbrace{\Delta x}_{\text{长度}}\approx\underbrace{\boxed{P(x_0<X\le x_0+\Delta x)}}_{\text{线段质量}}$$

密度长度　　　　线段质量

注意: 对于连续型 $r.v.X$, $P(X=a)=0$

其中 a 是随机变量 X 的一个可能的取值

事实上 $(X=a)\subset(a-\Delta x<X\le a)\qquad \Delta x>0$

$$0\le P(X=a)\le P(a-\Delta x<X\le a)=\int_{a-\Delta x}^{a}f(x)\mathrm{d}x$$

$$0\le P(X=a)\le \lim_{\Delta x\to+0}\int_{a-\Delta x}^{a}f(x)\mathrm{d}x\quad =0$$

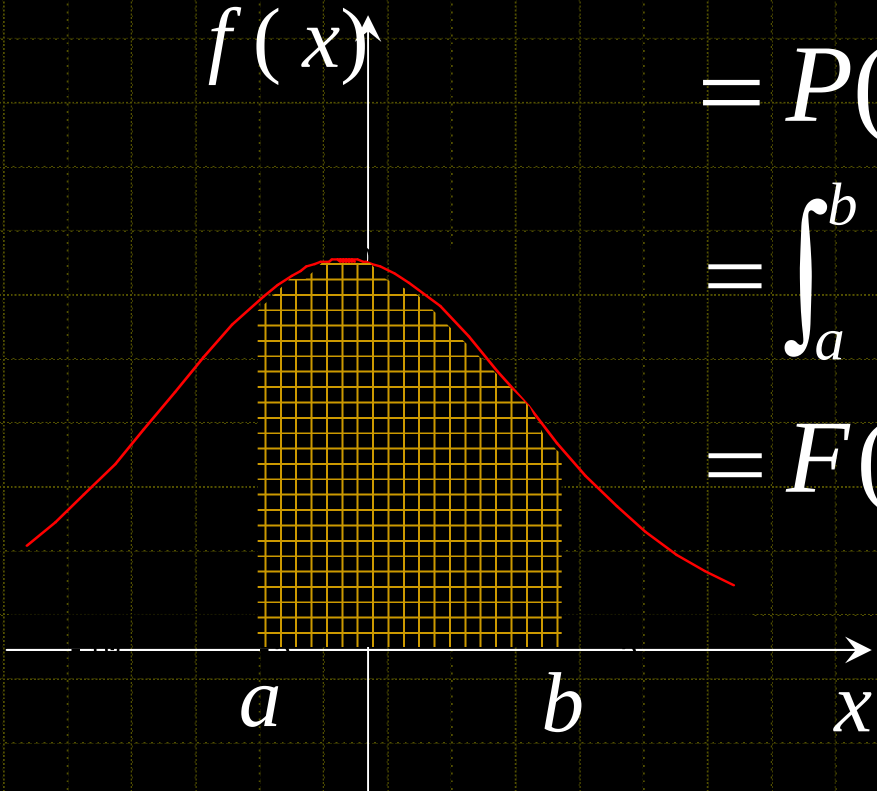
$\longrightarrow\quad P(X=a)=0$

命题 连续 $r.v.$ 取任一常数的概率为零

强调 概率为0 (1) 的事件未必不发生(发生)

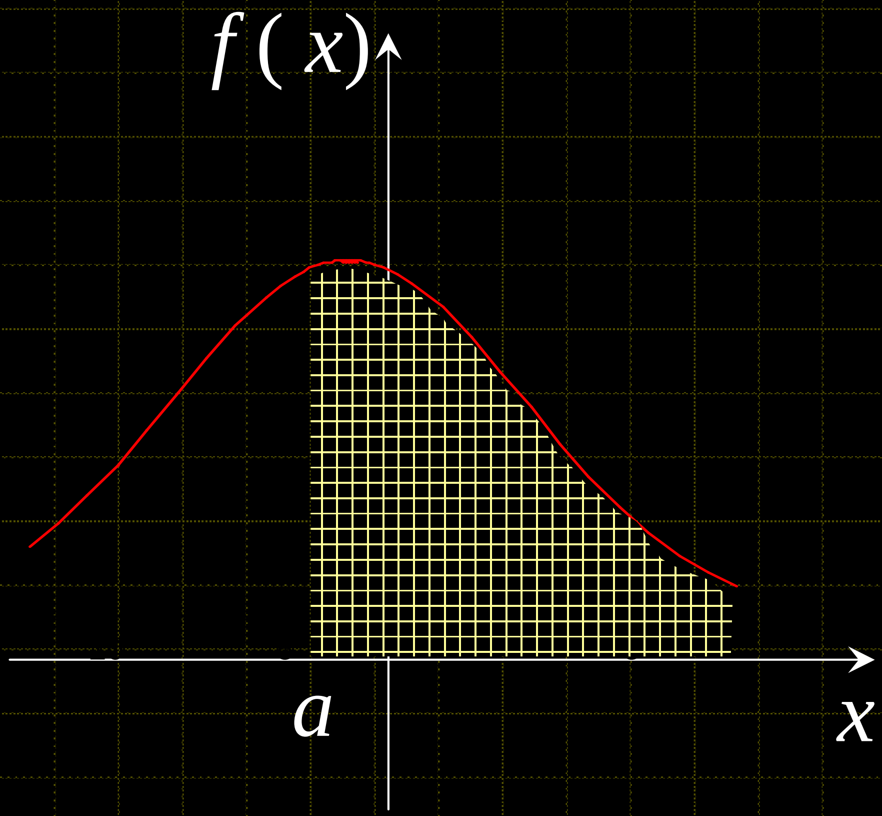
对于连续型 *r.v.* X

$$P(a<X\le b)=P(a\le X\le b)$$
$$=P(a<X<b)$$
$$=P(a\le X<b)$$
$$=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$
$$=F(b)-F(a)$$



$$P(X \le b) = P(X < b) = F(b)$$

$$P(X > a) = P(X \ge a) = 1 - F(a)$$



例1 已知某型号电子管的使用寿命 X 为连续r.v., 其 d.f.为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{c}{x^2}, & x>1000\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

(1) 求常数 c

(2) 计算 $P(X\le 1700\,|\,1500<X<2000)$

(3) 已知一设备装有3个这样的电子管, 每个电子管能否正常工作相互独立, 求在使用的最初1500小时只有一个损坏的概率.

解 (1) 令 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{1000}^{+\infty} \frac{c}{x^2}\mathrm{d}x = 1$

$\longrightarrow$ $c = 1000$

(2) $P(X \le 1700 \mid 1500 < X < 2000)$

$$= P(X \le 1700, 1500 < X < 2000) \Big/ P(1500 < X < 2000)$$

$$= P(1500 < X \le 1700) \Big/ P(1500 < X < 2000)$$

$$= \int_{1500}^{1700} \frac{1000}{x^2}\mathrm{d}x \Big/ \int_{1500}^{2000} \frac{1000}{x^2}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{4}{51} \Big/ \frac{1}{6} = \frac{24}{51} \approx 0.4706.$$

(3)

设A表示一个电子管的寿命小于1500小时

$$P(A)=P(0\le X<1500)=\int_{1000}^{1500}\frac{1000}{x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$$

设在使用的最初1500小时三个电子管中

损坏的个数为 $Y\sim B\left(3,\frac{1}{3}\right)$

$$P(Y=1)=P_3(1)=C_3^1\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$$

例2 设 $f(x)=(ax^2+bx+c)^{-1}$

为使 $f(x)$ 成为某 $r.v.\ X$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的

d.f.系数 a, b, c 必须且只需满足何条件？

解 由 $f(x)\geq 0 \Rightarrow h(x)=ax^2+bx+c>0$

$$\Rightarrow h'(x)=2ax+b,\ h''(x)=2a$$

当 $a>0 \Rightarrow h''(x)=2a>0 \Rightarrow h(x)$ 有最小值

$$h_{\min}(x)=c-b^2/4a$$

当且仅当 $c-b^2/4a>0$ 时

$$h(x)=ax^2+bx+c>0$$

另外由

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}(ax^2+bx+c)^{-1}dx=\frac{2\pi}{\sqrt{4ac-b^2}}=1$$

得 $$4ac-b^2=4\pi^2.$$

所以系数 a,b,c 必须且只需满足下列条件

$$a>0,\ \boxed{c-b^2/4a>0,}\ 4ac-b^2=4\pi^2.$$

可省略

作业 **P83** 习题二

16 18

常见的连续性随机变量的分布

(1) **均匀分布**　若 X 的 $d.f.$ 为

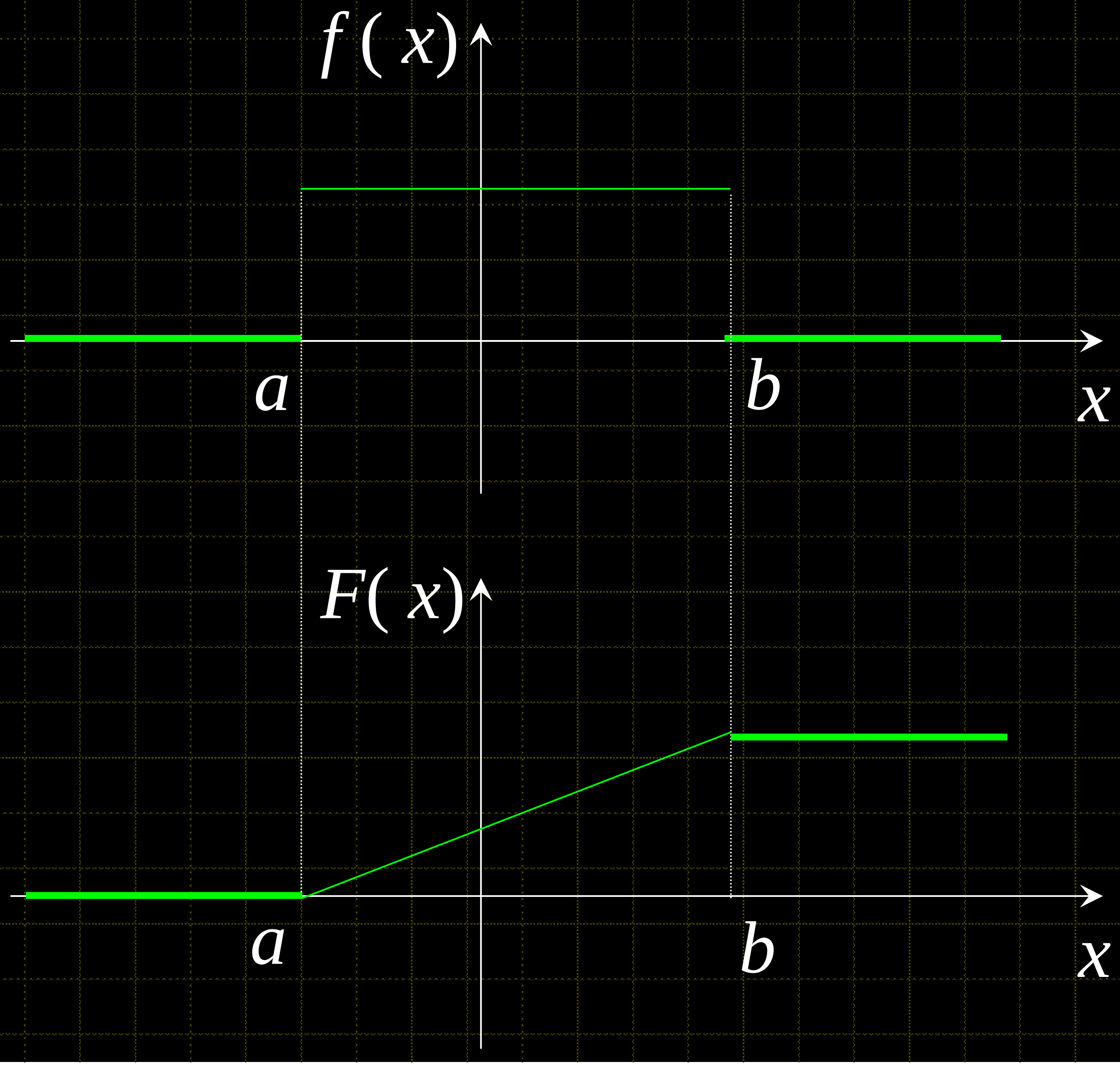
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

则称 X 服从区间(a,b)上的**均匀分布**或称 X 服从参数为 a,b的**均匀分布**. 记作

$$X\sim U(a,b)$$

X 的分布函数为

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 0, & x<a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \le x < b, \\ 1 & x \ge b \end{cases}$$



f (x)
a
b
x
F(x)
a
b
x

$$\forall (c,d) \subset (a,b),\ \ P(c<X<d)=\int_c^d \frac{1}{b-a}\mathrm{d}x=\frac{d-c}{b-a}$$

即 X 落在(a,b)内任何长为 $d-c$ 的小区间的概率与小区间的位置无关, 只与其长度成正比. 这正是几何概型的情形.

应用场合

进行大量数值计算时, 若在小数点后第 k 位进行四舍五入, 则产生的误差可以看作

服从 $U\left(-\frac{1}{2}10^{-k},\frac{1}{2}10^{-k}\right)$ 的 $r.v.$ 随机变量

例3 秒表最小刻度值为0.01秒. 若计时精度是取最近的刻度值, 求使用该表计时产生的随机误差X 的 $d.f.$ 并计算误差的绝对值不超过0.004秒的概率.

解 X 等可能地取得区间$[-0.005 \quad 0.005]$

上的任一值，则 $X \sim U[-0.005 \quad 0.005]$

$$f(x)=\begin{cases}100, & |x|\le 0.005\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

所以$P(|X| \le 0.004) = \int_{-0.004}^{0.004} 100\, dx = 0.8$

(2) 指数分布

若 X 的$d.f.$ 为

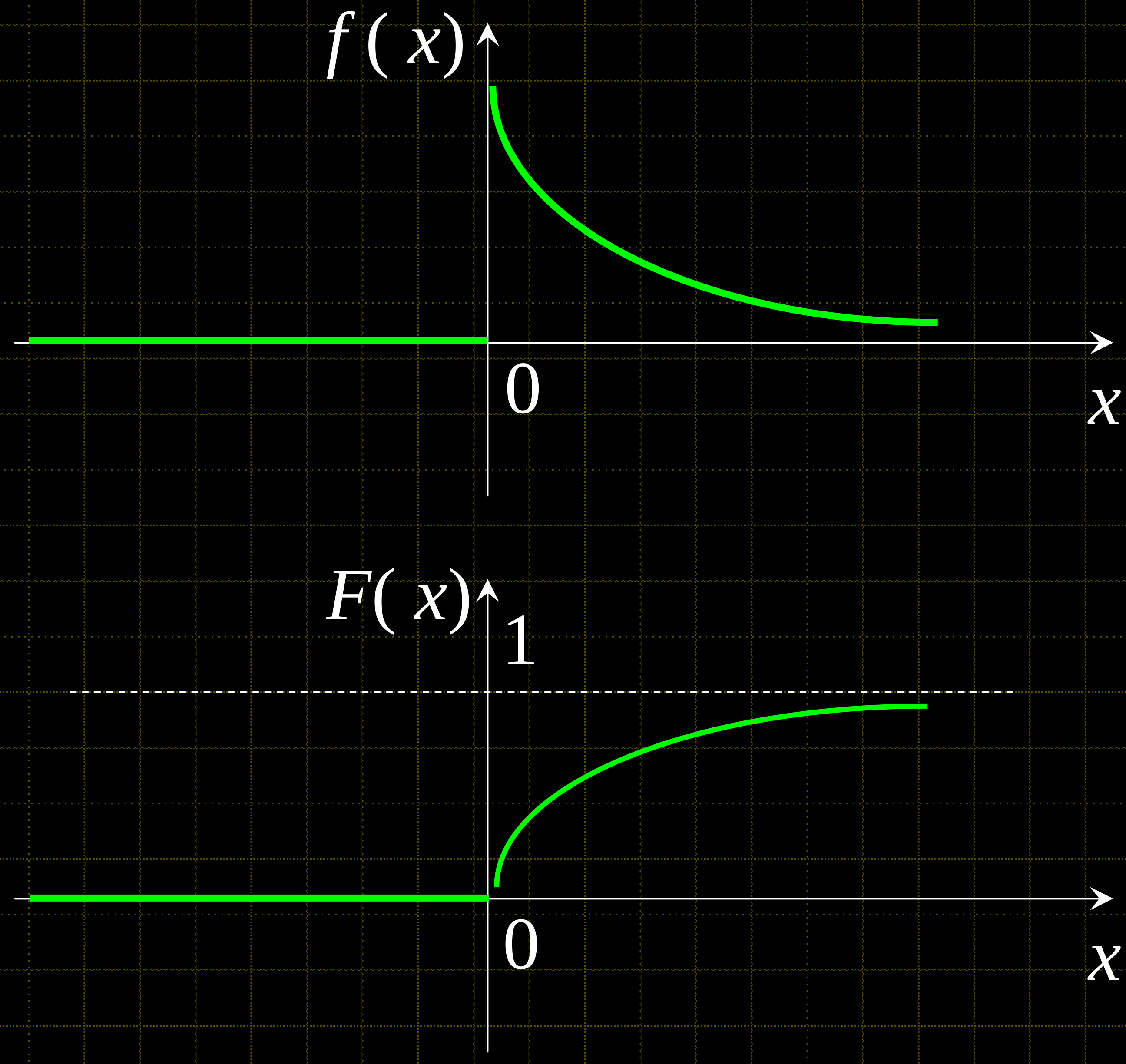
$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & 其他\end{cases}$$

$\lambda>0$ 为常数

则称 X 服从 参数为 λ 的指数分布

记作 $X\sim E(\lambda)$

X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1-e^{-\lambda x}, & x\geq 0\end{cases}$


f (x)
0
x
F(x)
1
0
x

对于任意的 $0 < a < b$,

$$P(a < X < b) = \int_a^b \lambda e^{-\lambda x} \mathrm{d}x$$

$$= F(b) - F(a)$$

$$= e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$$

应用场合 用指数分布描述的实例有：

随机服务系统中的服务时间

电话问题中的通话时间

无线电元件的寿命

动物的寿命

指数分布
常作为各种"寿命"
分布的近似

指数分布的“无记忆性”

命题 若 $X \sim E(\lambda)$,则

$$P(X > s+t \mid X > s) = P(X > t)$$

事实上

$$P(X>s+t \mid X>s) = \frac{P(X>s+t, X>s)}{P(X>s)} = \frac{P(X>s+t)}{P(X>s)}$$

$$= \frac{1-P(X \le s+t)}{1-P(X \le s)} = \frac{1-F(s+t)}{1-F(s)} = \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t} = P(X>t)$$

故又把指数分布称为“永远年轻”的分布

例4 假定一大型设备在任何长为 t 的时间内发生故障的次数 $N(t)\sim\pi(\lambda t)$，求

(1)相继两次故障的时间间隔 T 的概率分布;

(2)设备已正常运行 8 小时的情况下,再正常运行 10 小时的概率.

解 (1) $F_T(t)=P(T\le t)$

$$=\begin{cases}0, & t<0\\ 1-P(T>t), & t>0\end{cases}$$

$$P(T>t)=P(N(t)=0)=\frac{(\lambda t)^0 e^{-\lambda t}}{0!}=e^{-\lambda t}$$

$$F(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 1-e^{-\lambda t}, & t>0\end{cases}$$

$$f(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ \lambda e^{-\lambda t}, & t>0\end{cases}$$

即 $T \sim E(\lambda)$

(2) 由指数分布的“无记忆性”

$$P(T>18 \mid T>8)=P(T>8+10 \mid T>8)$$

$$=P(T>10)=e^{-10\lambda}$$

(3) 正态分布

若X 的 *d.f.* 为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad -\infty < x < +\infty$$

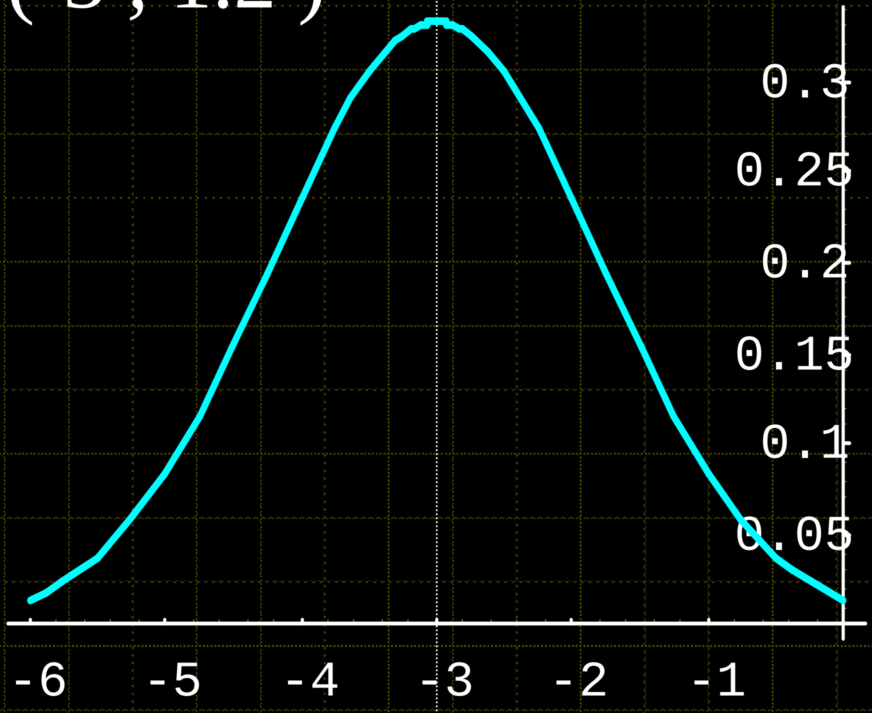
μ, σ 为常数, $\sigma > 0$

亦称高斯
(Gauss)分布

则称 X 服从参数为 μ, σ^2 的正态分布

记作 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$N(-3, 1.2)$



$$\mu = -3$$

$f(x)$ 的性质:

- 图形关于直线 $x=\mu$ 对称, 即

$$f(\mu+x)=f(\mu-x)$$

在 $x=\mu$ 时, $f(x)$ 取得最大值 $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$

在 $x=\mu\pm\sigma$ 时, 曲线 $y=f(x)$ 在对应的点处有拐点

曲线 $y=f(x)$ 以 x 轴为渐近线

曲线 $y=f(x)$ 的图形呈单峰状

$$P(X \le \mu) = F(\mu)$$

$$= 1 - F(\mu) = P(X > \mu)$$

$$= \frac{1}{2}$$

- $f(x)$ 的两个参数：

μ — 位置参数

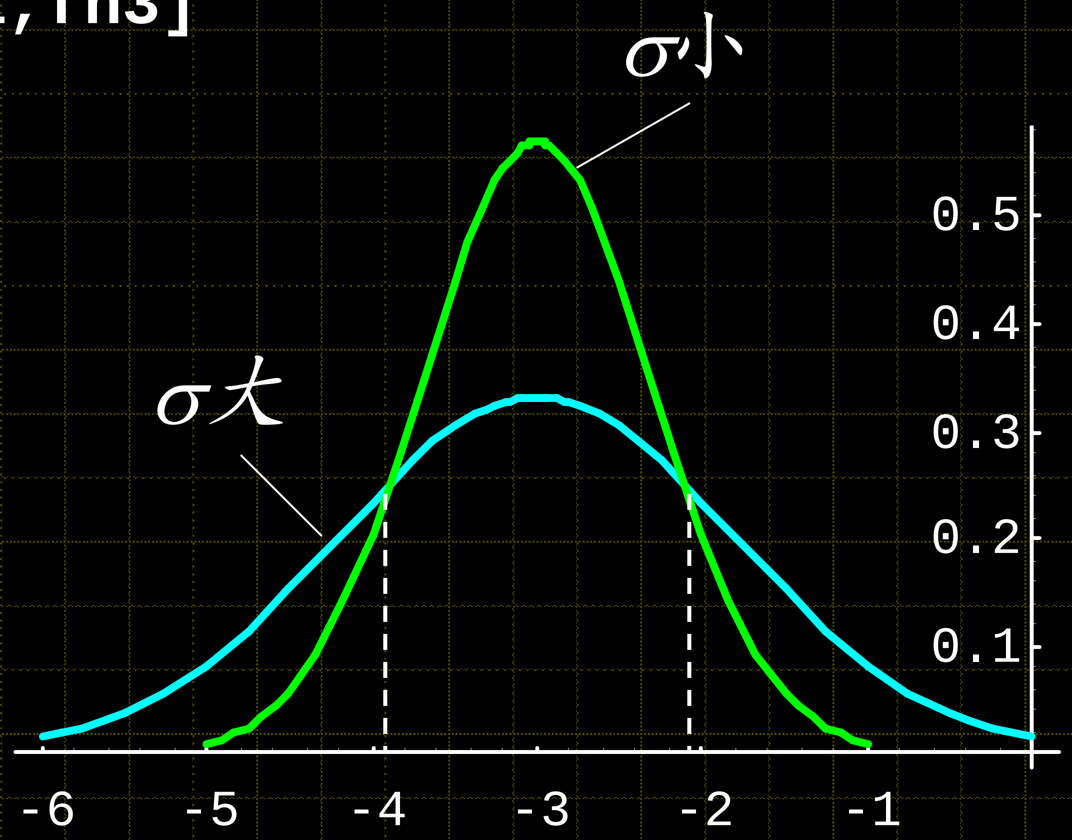
即固定 σ, 对于不同的 μ, 对应的 $f(x)$ 的形状不变化，只是位置不同

σ — 形状参数

固定 μ，对于不同的 σ，$f(x)$ 的形状不同.

若 $\sigma_1 < \sigma_2$ 则 $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_1} > \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_2}$ 前者取 μ 附近值的概率更大. $x = \mu \pm \sigma_1$ 所对应的拐点比$x=\mu \pm \sigma_2$ 所对应的拐点更靠近直线 $x=\mu$

```
Show[fn1,fn3]
```



几何意义—— σ 大小与曲线陡峭程度成反比

数据意义—— σ 大小与数据分散程度成正比

正态变量的条件

若 $r.v.\ X$

① 受众多相互独立的随机因素影响

② 每一因素的影响都是微小的

③ 且这些正、负影响可以叠加

则称 X 为正态 $r.v.$

可用正态变量描述的实例极多：

各种测量的误差； 人体的生理特征；

工厂产品的尺寸； 农作物的收获量；

海洋波浪的高度； 金属线抗拉强度；

热噪声电流强度； 学生的考试成绩；

• • • • • • • • • • • •

一种重要的正态分布

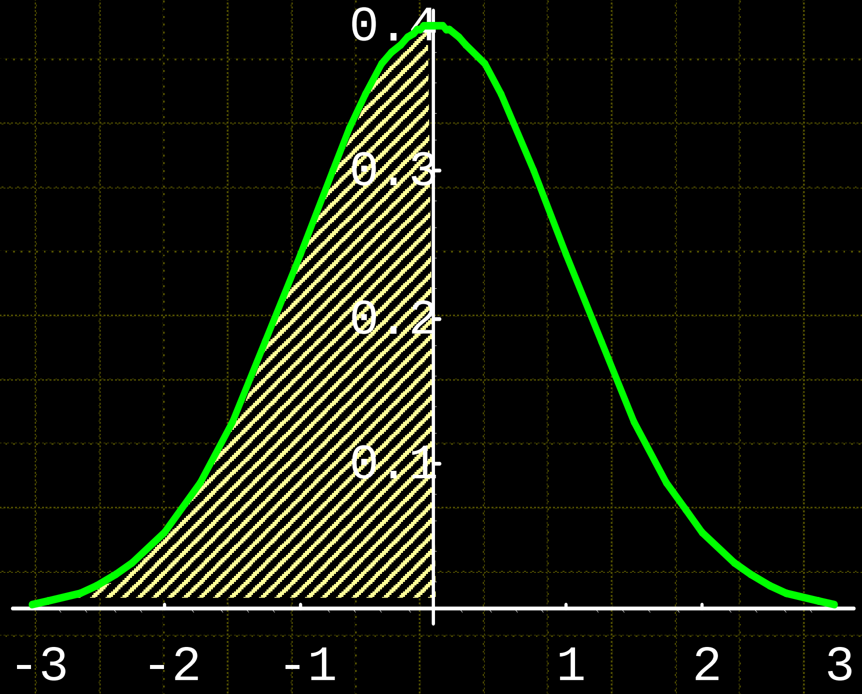
——标准正态分布 $N(0,1)$

密度函数 $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} \quad -\infty<x<+\infty$

是偶函数，分布函数记为

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t \quad -\infty<x<+\infty$$

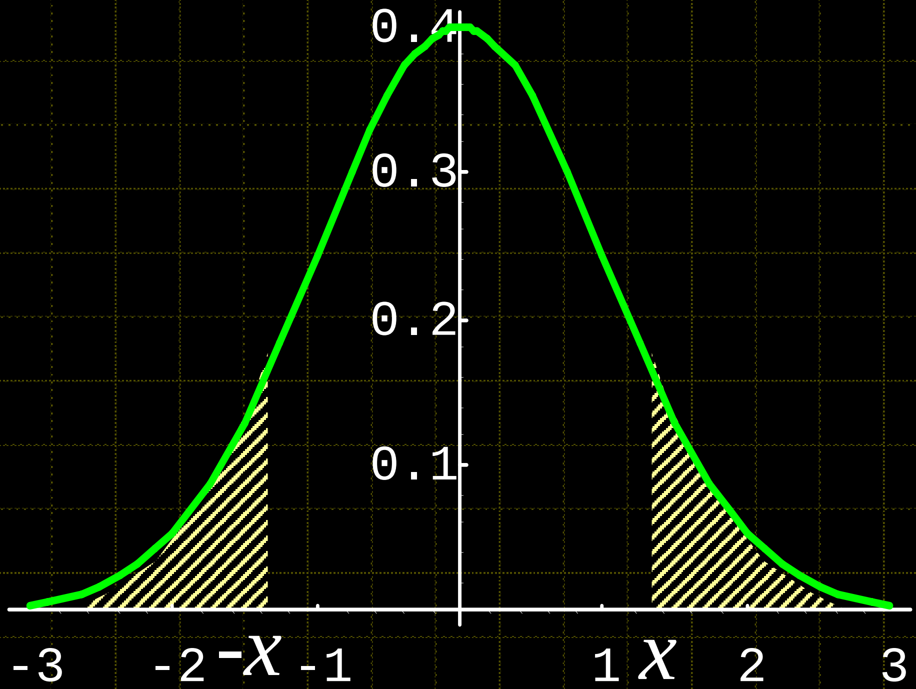
其值有专门的表供查.



$$\Phi(0) = 0.5 \qquad \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

$$P(|X| < a) = 2\Phi(a) - 1$$

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$



$$P(|X| < a) = 2\Phi(a) - 1$$

对一般的正态分布：$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

其分布函数 $F(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}t$

作变量代换 $s = \dfrac{t-\mu}{\sigma}$ $\longrightarrow$ $\boxed{F(x) = \Phi\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)}$

$\longrightarrow$ $P(a < X < b) = F(b) - F(a)$

$$= \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

$$P(X > a) = 1 - F(a)$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

例5 设 $X \sim N(1,4)$, 求 $P\,(0 \le X \le 1.6)$

解 $P(0 \le X \le 1.6) = \Phi\left(\dfrac{1.6-1}{2}\right) - \Phi\left(\dfrac{0-1}{2}\right)$

$= \Phi(0.3) - \Phi(-0.5)$

P380 附表3

$= \Phi(0.3) - [1 - \Phi(0.5)]$

$= 0.6179 - [1 - 0.6915]$

$= 0.3094$

例6 已知$X \sim N(2,\sigma^2)$且$P(\,2 < X < 4\,) = 0.3$,

求 $P\,(\,X < 0\,)$.

解一 $P(X<0) = \Phi\left(\dfrac{0-2}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\dfrac{2}{\sigma}\right)$

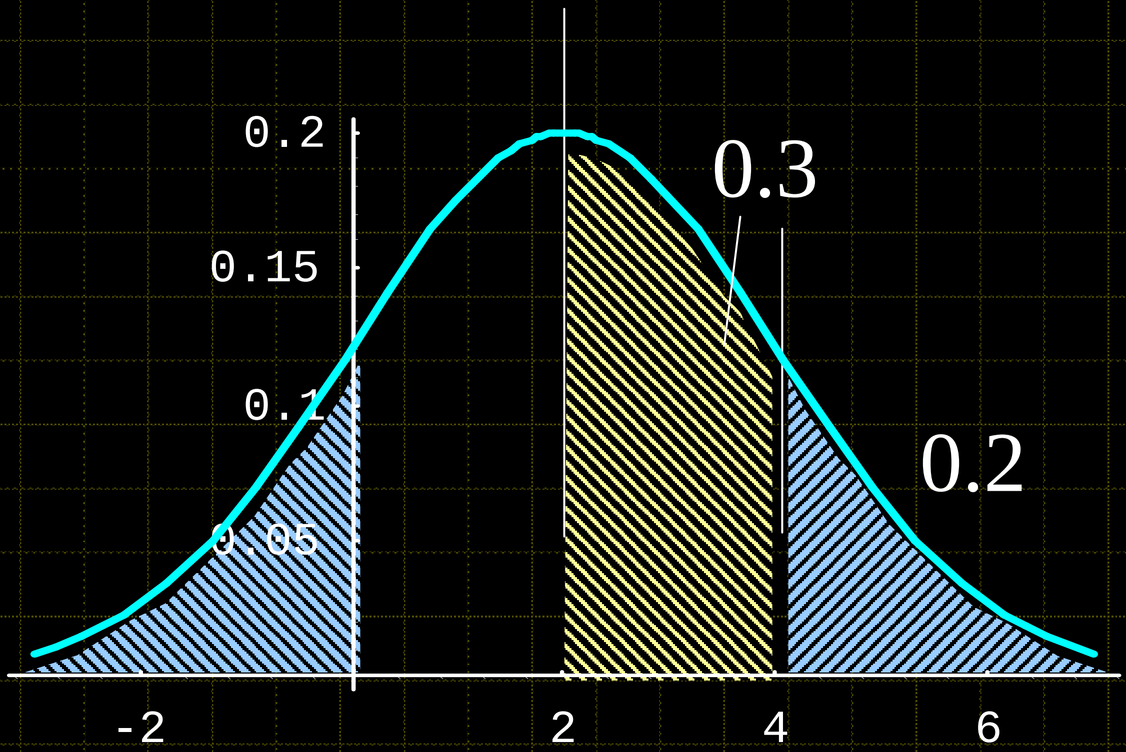
$$P(2 < X < 4) = \Phi\left(\frac{4-2}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{2-2}{\sigma}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right) - \Phi(0) = 0.3$$

$$\Longrightarrow \quad \Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right) = 0.8$$

$$\Longrightarrow \quad P(X<0) = 0.2$$

解二 图解法



由图

$$P(X<0)=0.2$$

例 3σ 原理

设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 求 $P(|X-\mu|<3\sigma)$

解 $P(|X-\mu|<3\sigma)=P(\mu-3\sigma<X<\mu+3\sigma)$

$$=\Phi\left(\frac{\mu+3\sigma-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\mu-3\sigma-\mu}{\sigma}\right)$$

$$=\Phi(3)-\Phi(-3)$$

$$=2\Phi(3)-1 \;=2\times 0.9987-1=0.9974$$

一次试验中, X 落入区间$(\mu-3\sigma,\ \mu+3\sigma)$的概率为 0.9974, 而超出此区间可能性很小

由3σ 原理知,

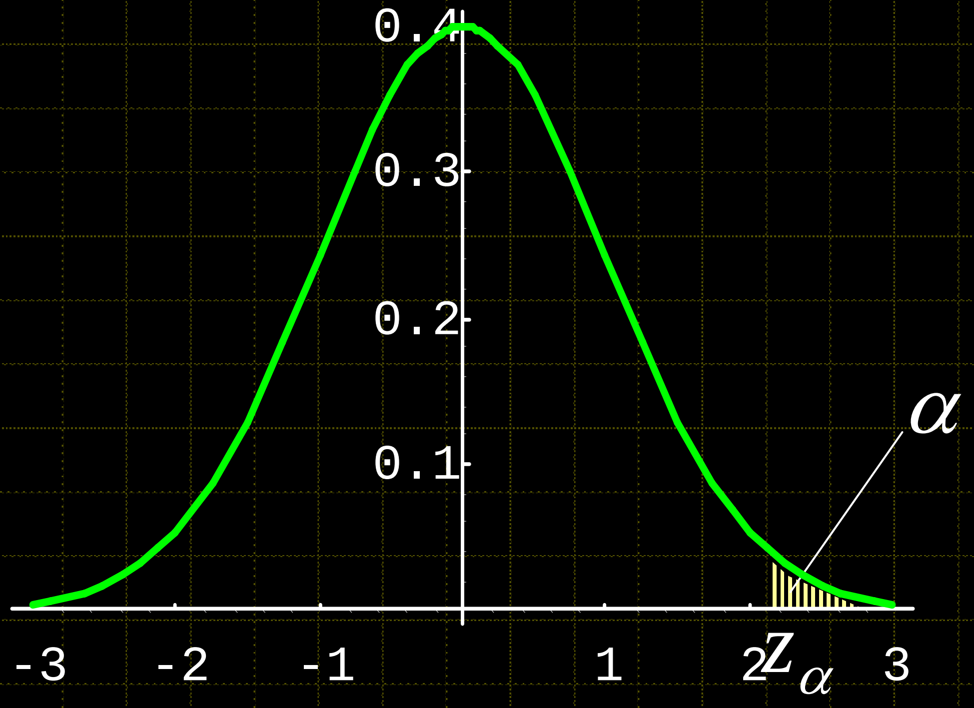
当 $a<-3$时 $\Phi(a)\approx 0$, $b>3$时 $\Phi(b)\approx 1$

标准正态分布的上 α 分位数 z_α

设 $X \sim N(0,1)$，$0<\alpha<1$，称满足

$$P(X > z_\alpha) = \alpha$$

的点 z_α 为 X 的上 α 分位数



常用数据

$z_{0.05} = 1.645$

$z_{0.025} = 1.96$

例7 设测量的误差 $X \sim N(7.5, 100)$(单位:米)问要进行多少次独立测量，才能使至少有一次误差的绝对值不超过10米的概率大于0.9？

解

$$P(|X| \le 10) = \Phi\left(\frac{10-7.5}{10}\right) - \Phi\left(\frac{-10-7.5}{10}\right)$$

$$= \Phi(0.25) - \Phi(-1.75)$$

$$= \Phi(0.25) - [1 - \Phi(1.75)]$$

$$= 0.5586$$

设 A 表示进行 n 次独立测量至少有一次误差的绝对值不超过10米

$$P(A) = 1 - (1 - 0.5586)^n > 0.9$$

$$\longrightarrow n > 3$$

故至少要进行 4 次独立测量才能满足要求.

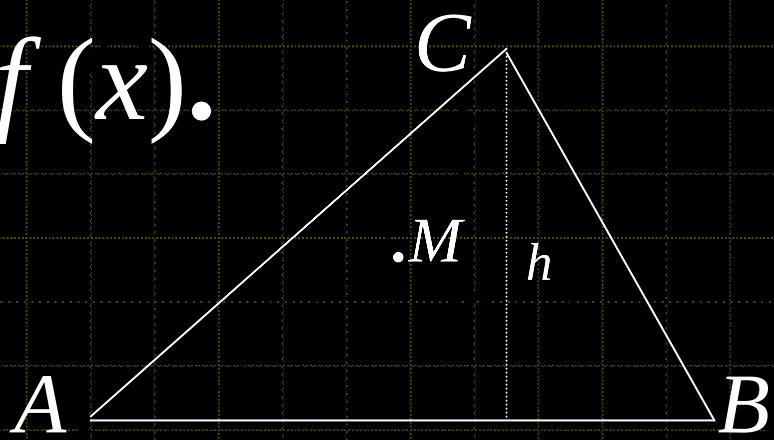
作业 P 84 习题二

22　　24

26　　27

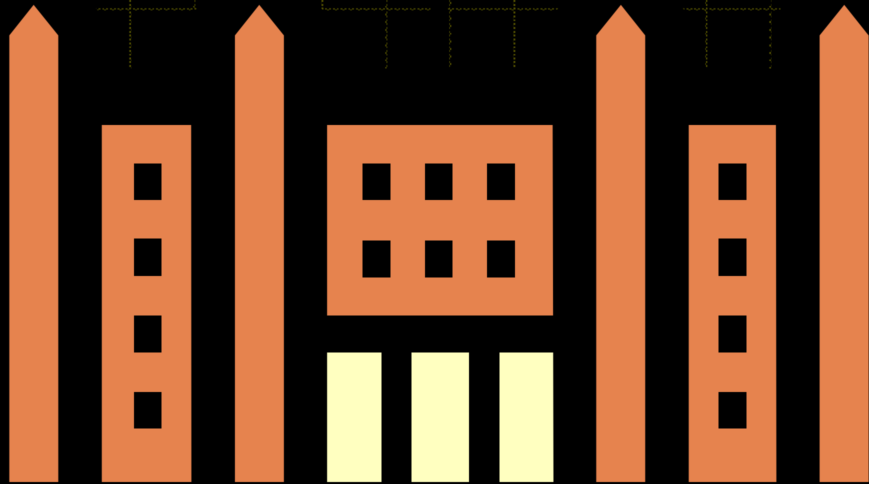
第 6 周 问题

在高为 h 的 $\triangle ABC$ 中任取一点 M，点 M 到 AB 的距离为随机变量 X，求其密度函数 $f(x)$.



第7周

问题



上海某年有 9万名高中毕业生参加高考，结果有5.4万名被各类高校录取．考试满分为600分，540分以上有2025人，360分以下有13500人．试估计高校录取最低分．

附录

思考题

在高为 h 的 $\triangle ABC$ 中任取一点 M，点 M 到 AB 的距离为随机变量 X，如何求其密度函数 $f(x)$?