§ 2.4 r.v. 函数的分布

问题 已知 r.v. X 的d.f. $f_X(x)$ 或分布律.

求 随机因变量$Y = g(X)$的密度函数 $f_Y(y)$ 或分布律

方法 将与Y有关的事件转化成 X 的事件

离散型 r.v.函数的分布

设 r.v. X 的分布律为

$$P(X = x_k) = p_k, \quad k = 1,2,\cdots$$

由已知函数 $g(x)$可求出 r.v. Y 的所有可能取值，则 Y 的概率分布为

$$P(Y = y_i) = \sum_{k:\, g(x_k) = y_i} p_k, \quad i = 1,2,\cdots$$

例1 已知 X 的概率分布为

X	-1	0	1	2
p_k	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

求 $Y_1 = 2X - 1$ 与 $Y_2 = X^2$ 的分布律

解

Y_1	-3	-1	1	3
p_i	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

Y_2	1	0	1	4
p_i	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

Y_2	0	1	4
p_i	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$

例2 已知 X 的概率分布为

$$P(X = k\frac{\pi}{2}) = pq^k, \quad k = 0,1,2,\cdots$$

其中 $p + q = 1,\ 0 < p < 1,$

求 $Y = \mathrm{Sin}\, X$ 的概率分布

解 $P(Y = 0) = P\left(\bigcup_{m=0}^{\infty}(X = 2m \cdot \frac{\pi}{2})\right)$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} pq^{2m} = \frac{p}{1-q^2}$$

$$P(Y=1)=P\left(\bigcup_{m=0}^{\infty}\left(X=2m\pi+\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$=P\left(\bigcup_{m=0}^{\infty}\left(X=(4m+1)\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}pq^{4m+1}=\frac{pq}{1-q^4}$$

$$P(Y=-1)=P\left(\bigcup_{m=0}^{\infty}\left(X=2m\pi+\frac{3\pi}{2}\right)\right)$$

$$=P\left(\bigcup_{m=0}^{\infty}\left(X=(4m+3)\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}pq^{4m+3}=\frac{pq^3}{1-q^4}$$

故 Y 的概率分布为

Y	-1	0	1
p_i	$\dfrac{pq^3}{1-q^4}$	$\dfrac{p}{1-q^2}$	$\dfrac{pq}{1-q^4}$

连续性 r.v.函数的分布

已知 X 的d.f. $f(x)$ 或分布函数

求 $Y = g(X)$ 的d.f.

方法:

（1） 从分布函数出发

（2）用公式直接求d.f.

例3 已知 X 的 d.f.为 $f_X(x), Y = aX + b$,

a, b 为常数，且 $a \neq 0$, 求 $f_Y(y)$

解

$$F_Y(y) = P(Y \leq y)$$

$$= P(aX + b \leq y)$$

当 $a > 0$ 时，

$$F_Y(y) = P\left(X \leq \frac{1}{a}(y-b)\right)$$

$$= F_X\left(\frac{1}{a}(y-b)\right)$$

$$\Longrightarrow \quad f_Y(y) = \frac{1}{a} f_X\left(\frac{1}{a}(y-b)\right)$$

当 $a<0$ 时，

$$F_Y(y)=P\left(X\geq\frac{1}{a}(y-b)\right)$$

$$=1-F_X\left(\frac{1}{a}(y-b)\right)$$

$$f_Y(y)=-\frac{1}{a}f_X\left(\frac{1}{a}(y-b)\right)$$

故

$$\boxed{f_Y(y)=\frac{1}{|a|}f_X\left(\frac{1}{a}(y-b)\right)}$$

例如 设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $Y = aX + b$, 则

$$f_Y(y) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{1}{a}(y-b)\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma|a|} e^{-\frac{(y-b-a\mu)^2}{2a^2\sigma^2}} \quad -\infty < y < \infty$$

$Y \sim N(a\mu + b,\ a^2\sigma^2)$

特别地， 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$,

则 $Y = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

例4 $X \sim E(2),\ Y = -3X + 2$，求 $f_Y(y)$

解 $$f_Y(y) = \frac{1}{|-3|} f_X\left(\frac{1}{-3}(y-2)\right)$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{3} \cdot 2e^{-2\cdot\left(-\frac{y-2}{3}\right)}, & -\frac{y-2}{3} > 0 \\ 0, & \text{其　他} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{2}{3} e^{-\frac{2(2-y)}{3}}, & y < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

例5 已知 $X \sim N(0,1)$，$Y = X^2$，求 $f_Y(y)$

解一 从分布函数出发

$$F_Y(y) = P(Y \le y)$$

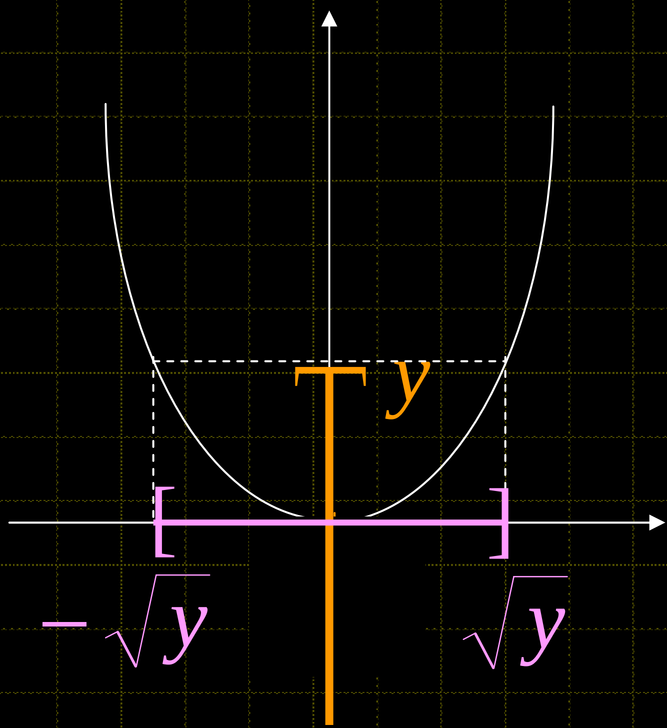
当 $y < 0$ 时， $F_Y(y) = 0$

当 $y > 0$ 时，

$$F_Y(y) = P(X^2 \le y)$$

$$= P(-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y})$$

$$= F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$$



$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y\le 0\\ F_X(\sqrt{y})-F_X(-\sqrt{y}), & y>0\end{cases}$$

故

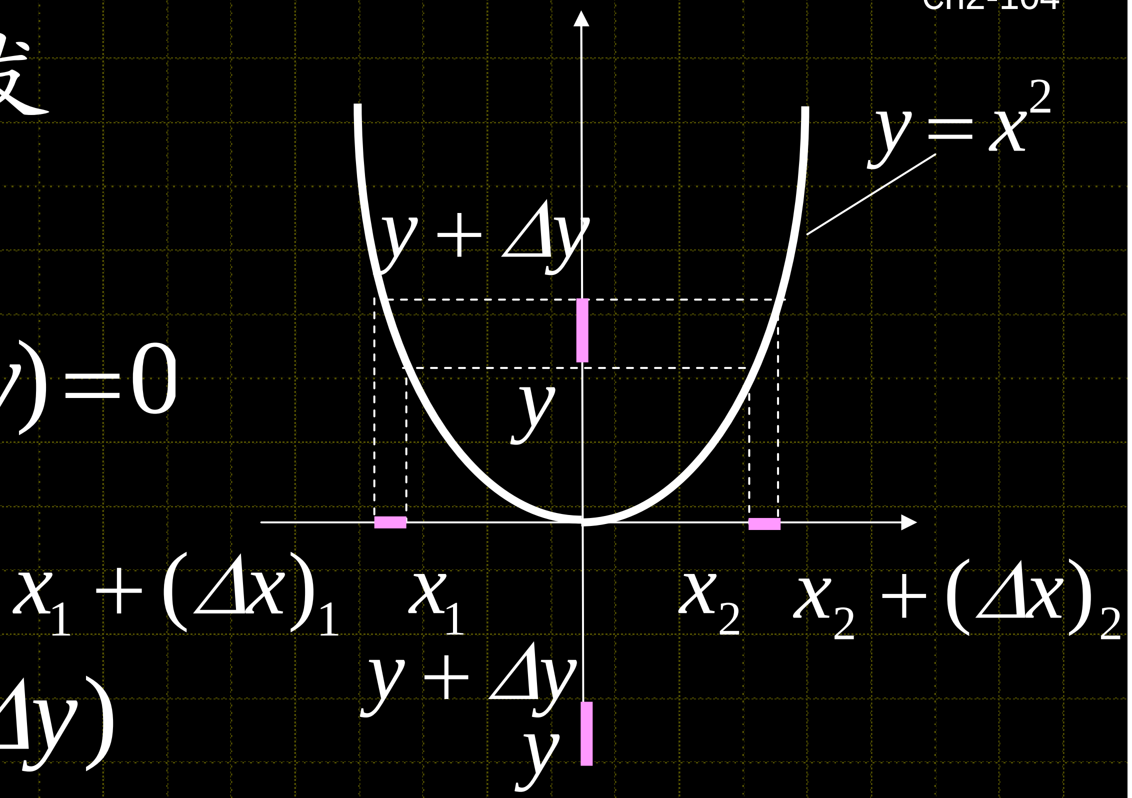
$$f_Y(y)=\begin{cases}0, & y\le 0\\ \dfrac{1}{2\sqrt{y}}\left(f_X(\sqrt{y})+f_X(-\sqrt{y})\right), & y>0\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}0, & y\le 0\\ \dfrac{1}{2\sqrt{\pi y}^{1/2}}e^{-\frac{y}{2}}, & y>0\end{cases}$$

解二 从 d.f. 出发

当 $y<0$ 时

$$P(y<Y\le y+\Delta y)=0$$



当 $y>0$ 时

$$P(y<Y\le y+\Delta y)$$

$$=P(x_1+(\Delta x)_1\le X<x_1)+P(x_2<X\le x_2+(\Delta x)_2)$$

即

$$f_Y(y)\Delta y = f_X(x_1)[-(\Delta x)_1]+f_X(x_2)(\Delta x)_2$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \frac{f_X(x_1)}{-\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_1}} + \frac{f_X(x_2)}{\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_2}}$$

$$= \frac{f_X(x_1)}{\left|\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_1}} + \frac{f_X(x_2)}{\left|\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_2}}$$

$$= \frac{f_X(-\sqrt{y})}{\left|\frac{dy}{dx}\right|_{x=-\sqrt{y}}} + \frac{f_X(\sqrt{y})}{\left|\frac{dy}{dx}\right|_{x=\sqrt{y}}}$$

$$= \frac{1}{|-2\sqrt{y}|}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(-\sqrt{y})^2}{2}}\right)$$

$$+\frac{1}{|2\sqrt{y}|}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\sqrt{y})^2}{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}}e^{-\frac{y}{2}}$$

故

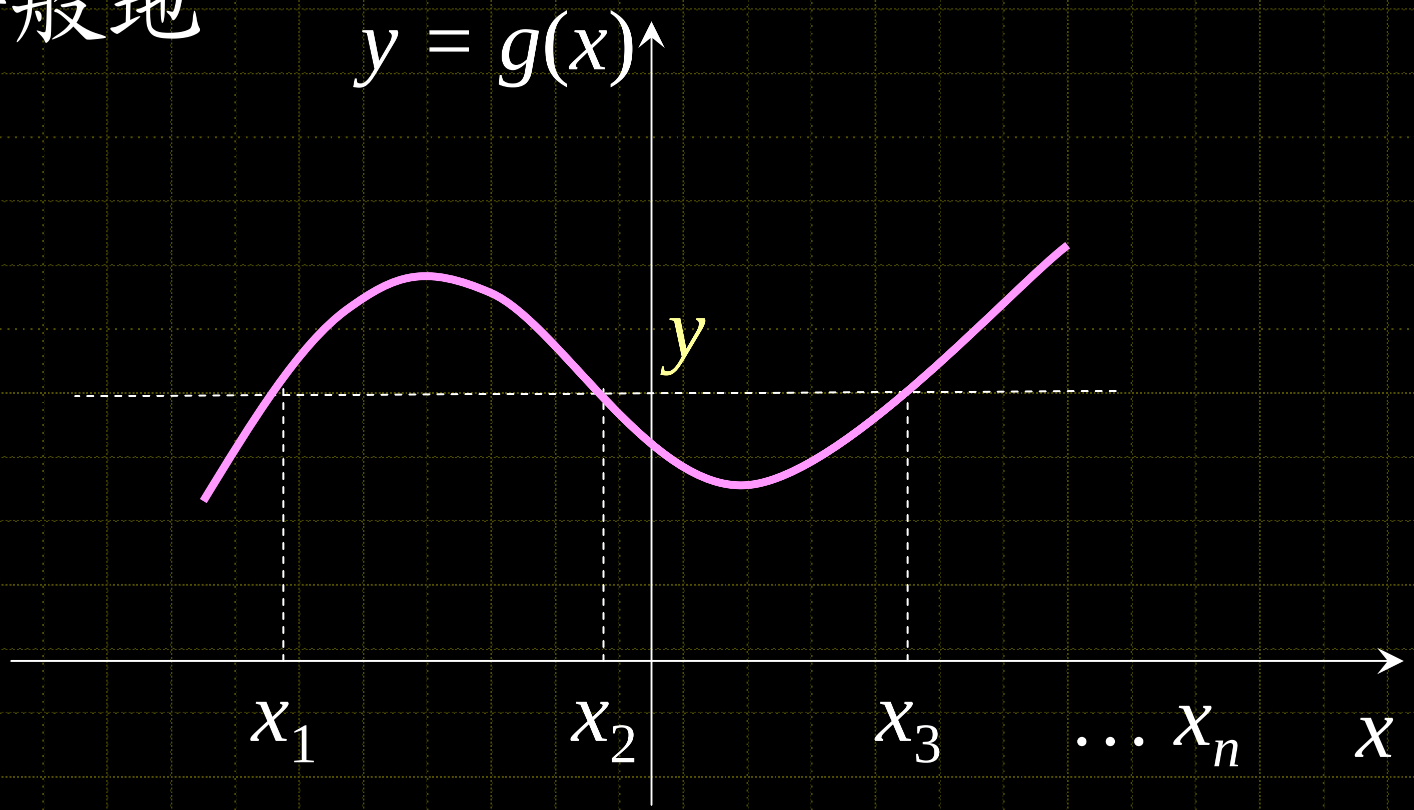
$$f_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi y}}e^{-\frac{y}{2}}, & y \geq 0 \end{cases}$$

此答案是否对？

应修正为

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi y}}e^{-\frac{y}{2}}, & y > 0 \end{cases}$$

一般地

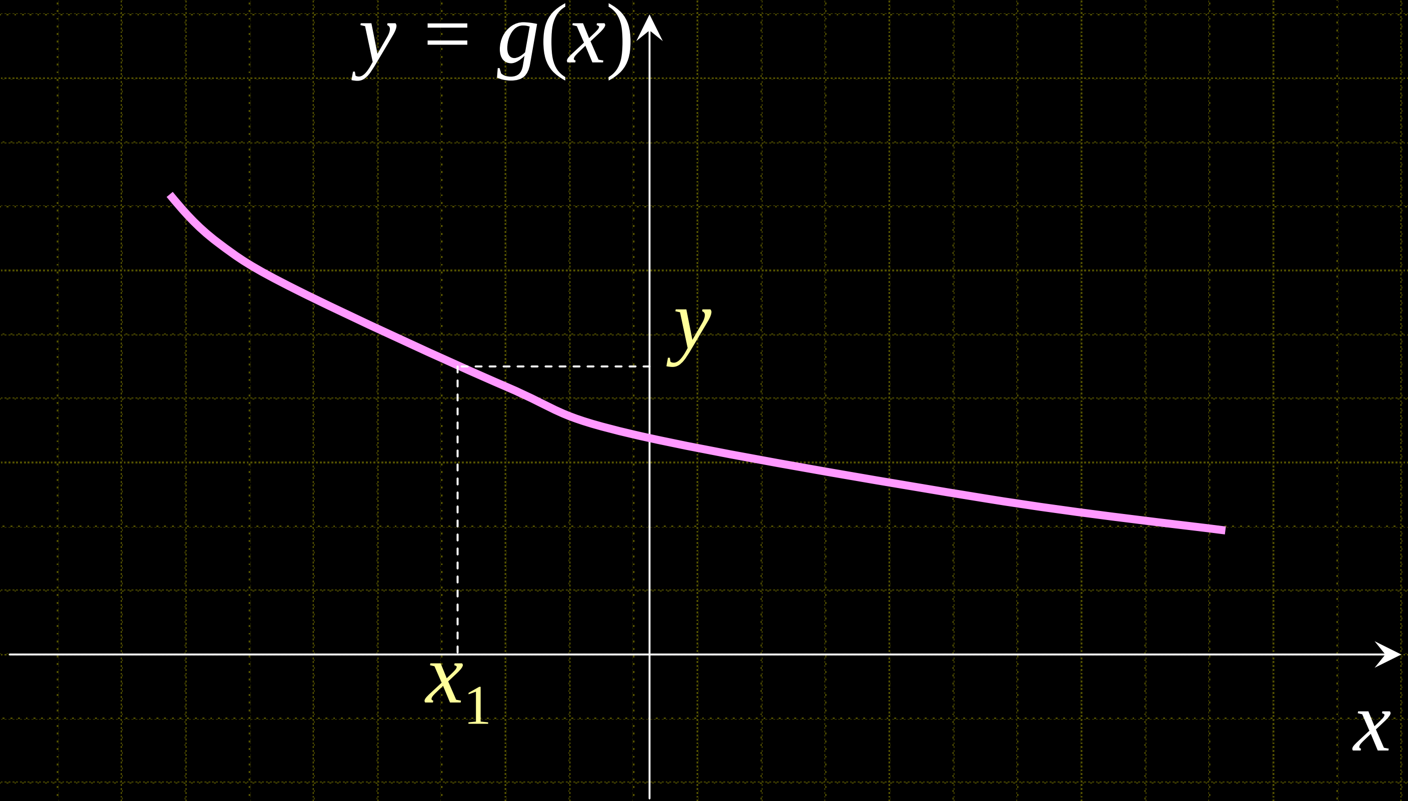


$$f_Y(y) = \frac{f_X(x_1)}{\left|\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_1}} + \frac{f_X(x_2)}{\left|\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_2}} + \cdots + \frac{f_X(x_n)}{\left|\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_n}}$$

特别地，若$g(x)$为单调函数，则

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x_1)}{\left|\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_1}}$$

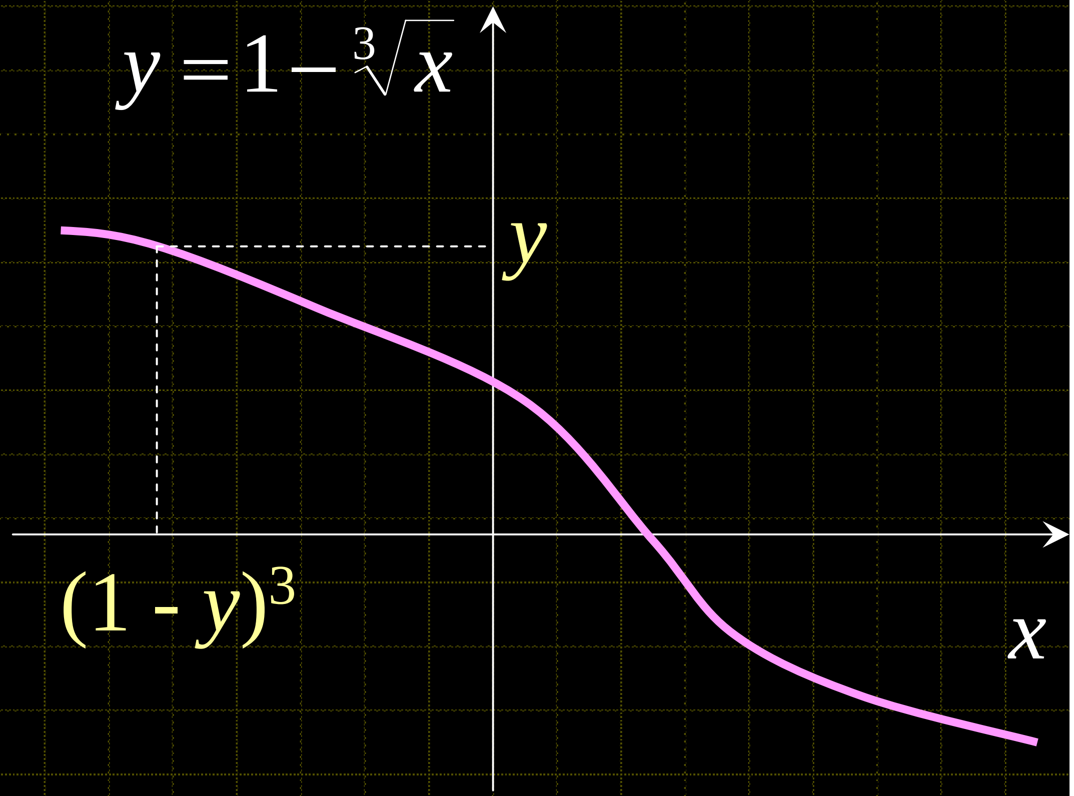
其中$x_1 = g^{-1}(y)$



例6 设 $f_X(x)=\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$, $-\infty<x<+\infty$

$$Y=1-\sqrt[3]{X}$$

求 $f_Y(y)$



解

$$f_Y(y)=\frac{f_X\left[(1-y)^3\right]}{\left|\frac{dy}{dx}\right|_{x=(1-y)^3}}$$

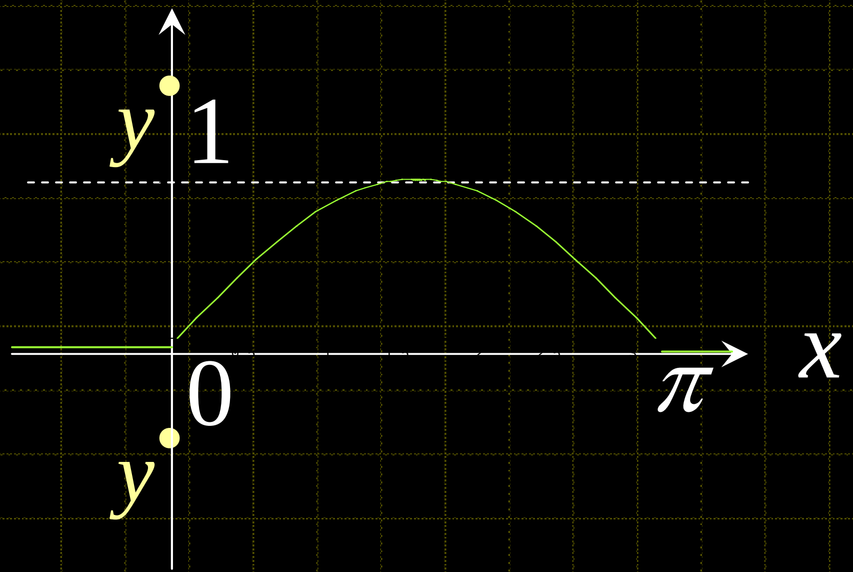
$$=f_X\left[(1-y)^3\right]\left|\frac{dx}{dy}\right|_{x=(1-y)^3}=\frac{3(1-y)^2}{\pi\left[1+(1-y)^6\right]},\ -\infty<y<+\infty$$

例7 设 X 的 p.d.f.为

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\pi^2}, & 0<x<\pi\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求$Y=\sin X$ 的 p.d.f.

解 由图可知, Y 的取值范围为(0,1)



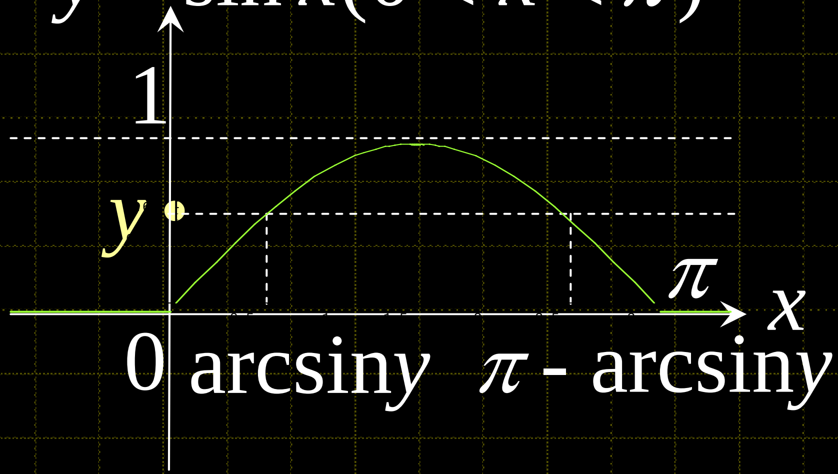
故当 $y\le 0$

或 $y\ge 1$ 时

$$f_Y(y)=0$$

当 $0 \le y < 1$ 时

$y = \sin x (0 < x < \pi)$



$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\left[\frac{2\arcsin y}{\pi^2} + \frac{2(\pi - \arcsin y)}{\pi^2}\right]$$

$$= \frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}$$

故

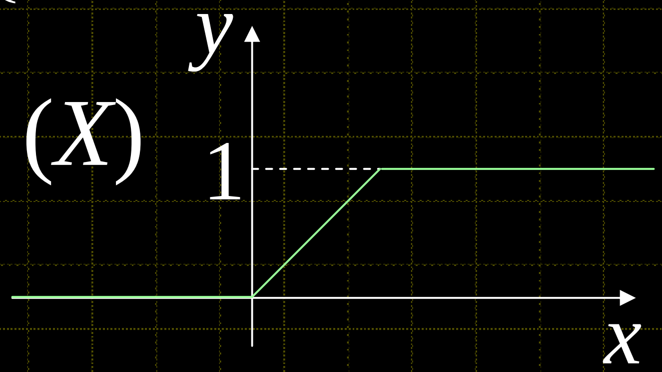
$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

注意 连续 r. v. 的函数的分布函数不一定是连续函数

例如 $X \sim U(0,2)$ $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 < x < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ x, & 0 < x \le 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

令 $Y = g(X)$



$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ \frac{y}{2}, & 0 \le y < 1 \\ 1, & y \ge 1 \end{cases}$$

$F_Y(y)$ 不是连续函数

作业 P. 85 习题二

28　　30

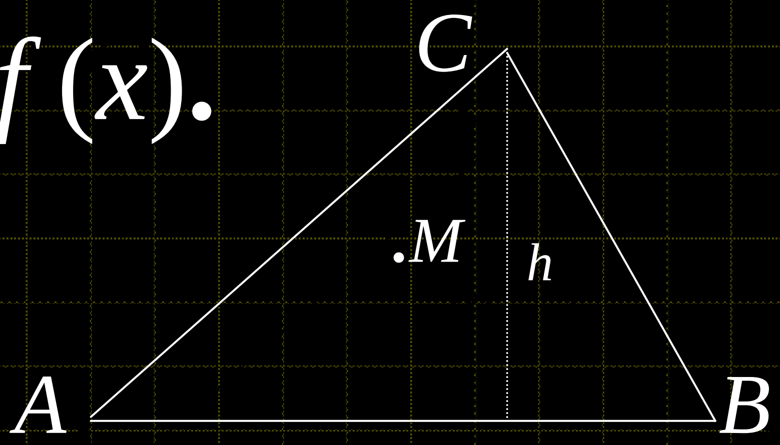
32 (2)

33 (1) (3)

35　　36

第 6 周 问 题

在高为 h 的 $\triangle ABC$ 中任取一点 M，点 M 到 AB 的距离为随机变量 X，求其密度函数 $f(x)$.



第7周

问题

设 r.v. X 服从(0,1)内均匀分布,

又 $X=[1+g(Y)]/2$

其中 $g(y)=\dfrac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{o}^{y}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

求 r.v. Y 的 p.d.f.

第 8 周

问题

设 r.v.Z 服从参数为 1 的指数分布，引入随机变量：

$$X=\begin{cases}0 & Z\le 1\\ 1 & Z>1\end{cases} \qquad Y=\begin{cases}0 & Z\le 2\\ 1 & Z>2\end{cases}$$

求 (X, Y) 的联合分布律