概率统计第三章习题课

补充题 $(X,Y)\sim f(x,y)\quad Z=aX+bY+c$ 求 $f_Z(z)$

答案

$$f_Z(z)=\frac{1}{|b|}\int_{-\infty}^{\infty} f\left(x,\frac{z-ax-c}{b}\right)dx$$

$$\overset{\text{或}}{=\!=}\frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{z-by-c}{a},y\right)dy$$

概率统计习题课 (3)

3-22

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} |y| f_X(yz) f_Y(y) dy \quad (1)$$

$$\overset{?}{=} \int_{-\infty}^{\infty} |y| \cdot \frac{1000}{(yz)^2} \cdot \frac{1000}{y^2} dy$$

1000

$$\overset{?}{=} \int_{1000}^{\infty} \frac{1000^2}{y^3 z^2} dy \overset{?}{=} \begin{cases} 0 & z < 1 \\ \frac{1}{2z^2} & z \geq 1 \end{cases}$$

Z 轴上的分界点是如何得到的？

正确解法

考虑(1)中被积函数为非零情形

当$\begin{cases} yz > 1000 \\ y > 1000 \end{cases}$ 即$\begin{cases} y > \dfrac{1000}{z} \\ y > 1000 \end{cases}$ (*) 时， $f_X \cdot f_Y \neq 0$

当 $z < 0$ 时， $f_X = 0 \Rightarrow f_Z(z) = 0$

当 $0 < z < 1$ 时，(*)的解为 $y > \dfrac{1000}{z}$

当 $z \geq 1$ 时，(*)的解为 $y > 1000$

$$f_Z(z) = \begin{cases} 0 & z \leq 0 \\ \displaystyle\int_{\frac{1000}{z}}^{\infty} y \cdot \frac{1000}{(yz)^2} \cdot \frac{1000}{y^2} dy = \frac{1}{2} & 0 < z < 1 \\ \displaystyle\int_{1000}^{\infty} y \cdot \frac{1000}{(yz)^2} \cdot \frac{1000}{y^2} dy = \frac{1}{2z^2} & z \geq 1 \end{cases}$$

3-23

解法一

$$F_Z(z)=0 \qquad z<0$$

$$F_Z(z)=P(\sqrt{X^2+Y^2}<z)=\iint\limits_{\sqrt{x^2+y^2}<z}\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^z\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}rdr=\frac{1}{\sigma^2}\int_0^z e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}rdr$$

$$=1-e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} \qquad z\geq 0$$

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}\dfrac{z}{\sigma^2}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} & z\geq 0\\ 0 & z<0\end{cases}$$

解法二 仿书P.125 的推导, 得 $Z=\sqrt{X^2+Y^2}$ 的概率密度函数为

$$f_Z(z)=\begin{cases}\int_0^{2\pi} z f_X(z\cos\theta) f_Y(z\sin\theta)d\theta & z\geq 0\\ 0 & z<0\end{cases}$$

于是 $f_Z(z)=\int_0^{2\pi} z\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}d\theta$

$$=\frac{z}{\sigma^2}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} \quad z\geq 0$$

从而 $f_Z(z)=\begin{cases}\frac{z}{\sigma^2}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} & z\geq 0\\ 0 & z<0\end{cases}$

3-29

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\quad -\infty<x<+\infty$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2b} & -b\le y\le b\\ 0 & \text{其　他}\end{cases}$$

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y)f_X(z-y)dy$$

$$=\int_{-b}^{b}\frac{1}{2b}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(z-y-\mu)^2}{2\sigma^2}}dy \;\underline{\underline{\text{令}\,\frac{z-y-\mu}{\sigma}=t}}$$

$$=\int_{-b}^{b}\frac{1}{2b}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(z-y-\mu)^2}{2\sigma^2}}dy \ \underset{\text{令}\frac{z-y-\mu}{\sigma}=t}{=\!=\!=}$$

$$=-\frac{1}{2b}\int_{\frac{z+b-\mu}{\sigma}}^{\frac{z-b-\mu}{\sigma}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$$=\frac{1}{2b}\left[\Phi\left(\frac{z+b-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{z-b-\mu}{\sigma}\right)\right].$$

X,Y 独立 $\Rightarrow X^2,Y^2$ 独立（其逆不真

反例

$$(X,Y)\sim f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1+xy}{4} & |x|<1,|y|<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

$$P(X^2\le x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}\left(\int_{-1}^{1}\dfrac{1+uy}{4}dy\right)du=\sqrt{x} & 0\le x<1\\ 1 & x\ge 1\end{cases}$$

由对称性

$$P(Y^2\le y)=\begin{cases}0 & y<0\\ \sqrt{y} & 0\le y<1\\ 1 & y\ge 1\end{cases}$$

$$P(X^2 \le x, Y^2 \le y) = \begin{cases} 0 & x < 0 \text{或} y < 0 \\ \sqrt{x} & 0 \le x < 1, y \ge 1 \\ \sqrt{y} & x \ge 1, 0 \le y < 1 \\ \sqrt{xy} & 0 \le x < 1, 0 \le y < 1 \\ 1 & x \ge 1, \quad y \ge 1 \end{cases}$$

对一切实数 x,y 恒有

$$P(X^2 \le x, Y^2 \le y) = P(X^2 \le x) P(Y^2 \le y)$$