多维分布

第三章

多维随机变量及其分布

在实际问题中,试验结果有时需要同时用两个或两个以上的 *r.v.*来描述.

例如 用温度和风力来描述天气情况. 通过对含碳、含硫、含磷量的测定来研究钢的成分. 要研究这些 *r.v.*之间的联系，就需考虑多维 *r.v.*及其取值规律—多维分布.

§3.1 二维随机变量及其分布

定义 设Ω为随机试验的样本空间，

$$\forall \omega \in \Omega \xrightarrow{\text{一定法则}} \exists \left(X(\omega), Y(\omega) \right) \in R^2$$

则称(X , Y)为**二维r.v.**或**二维随机向量**

讨论:

- 二维r.v.作为一个整体的概率特性
- 其中每一个r.v.的概率特性与整体的概率特性之间的关系

二维随机变量的联合分布函数

定义 设(X, Y)为二维 r.v. 对任何一对实数(x, y), 事件

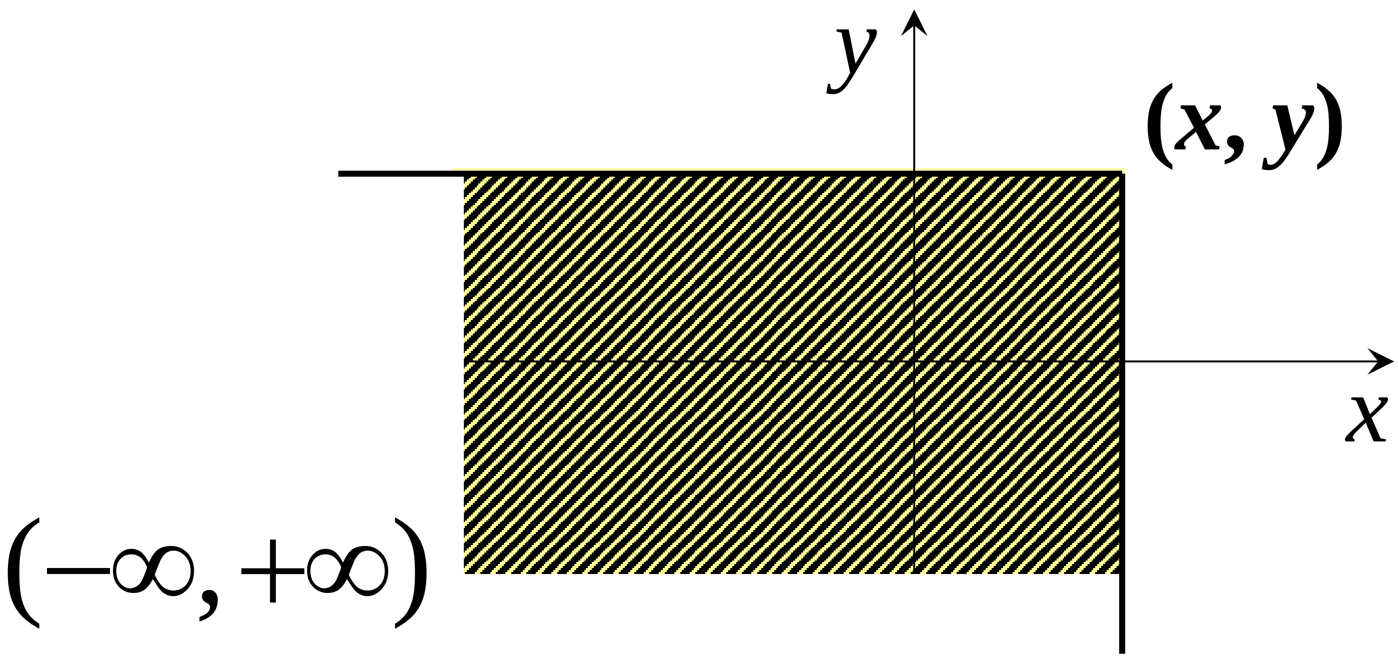
$$(X \le x) \cap (Y \le y) \quad (\text{记为}(X \le x, Y \le y))$$

的概率 $P(X \le x, Y \le y)$ 定义了一个二元实函数 $F(x, y)$，称为二维 r.v.(X, Y) 的分布函数，即

$$F(x,y) = P(X \le x, Y \le y)$$

分布函数的几何意义

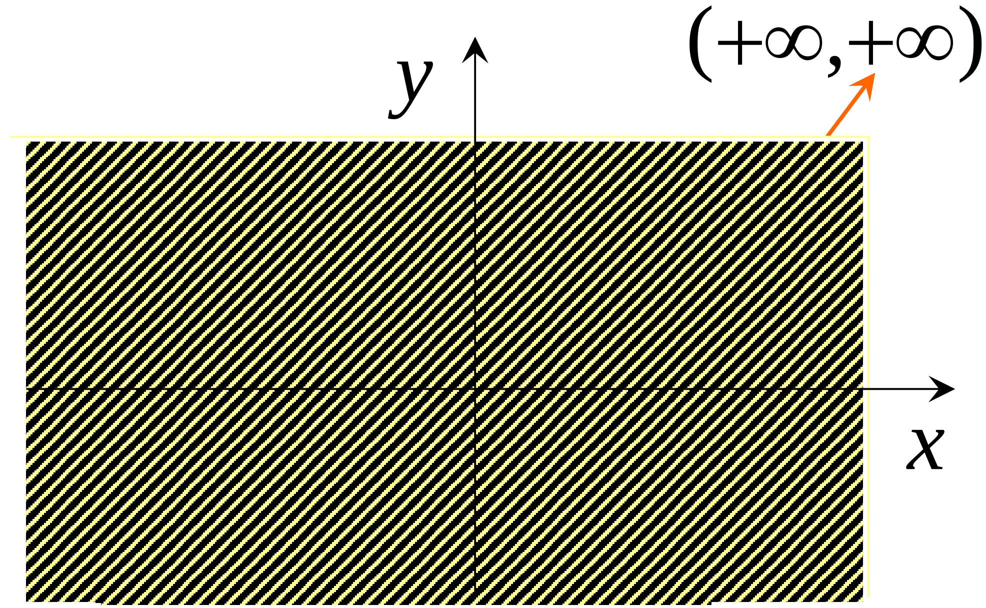
如果用平面上的点 (x, y) 表示二维r.v. (X, Y)的一组可能的取值，则 $F(x, y)$ 表示 (X, Y) 的取值落入图所示角形区域的概率.



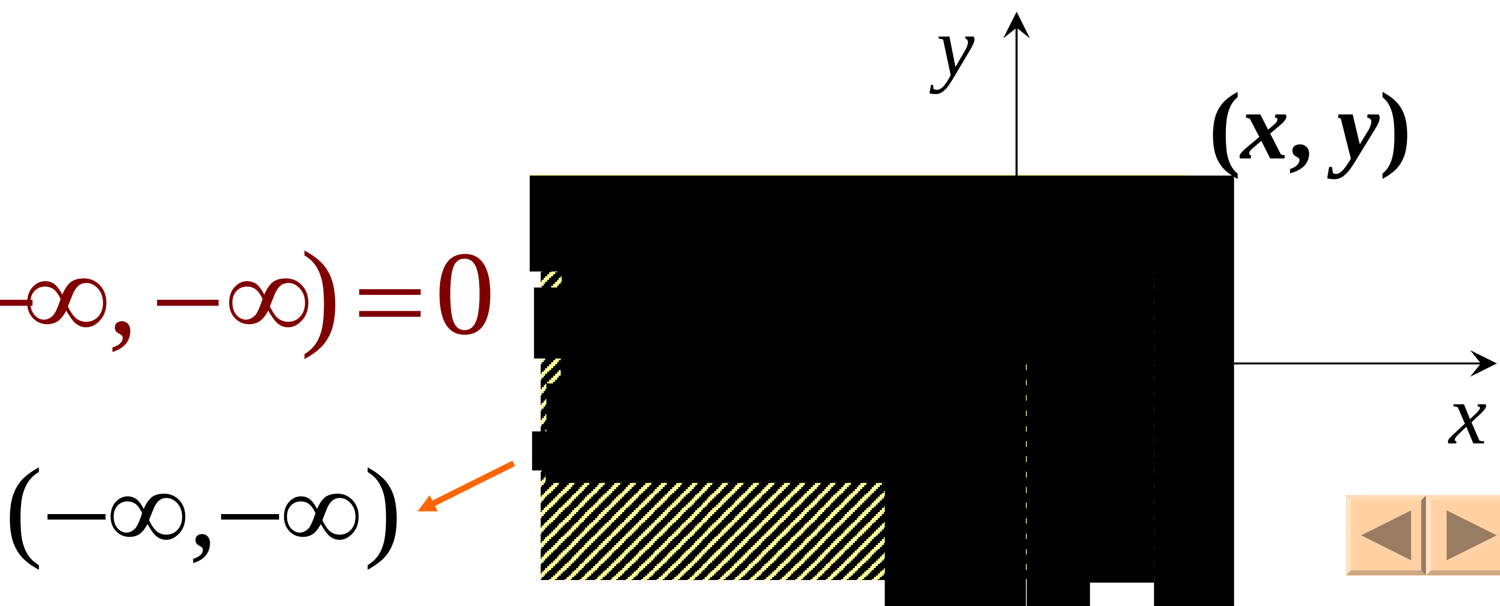
联合分布函数的性质

① $0 \le F(x,y) \le 1$

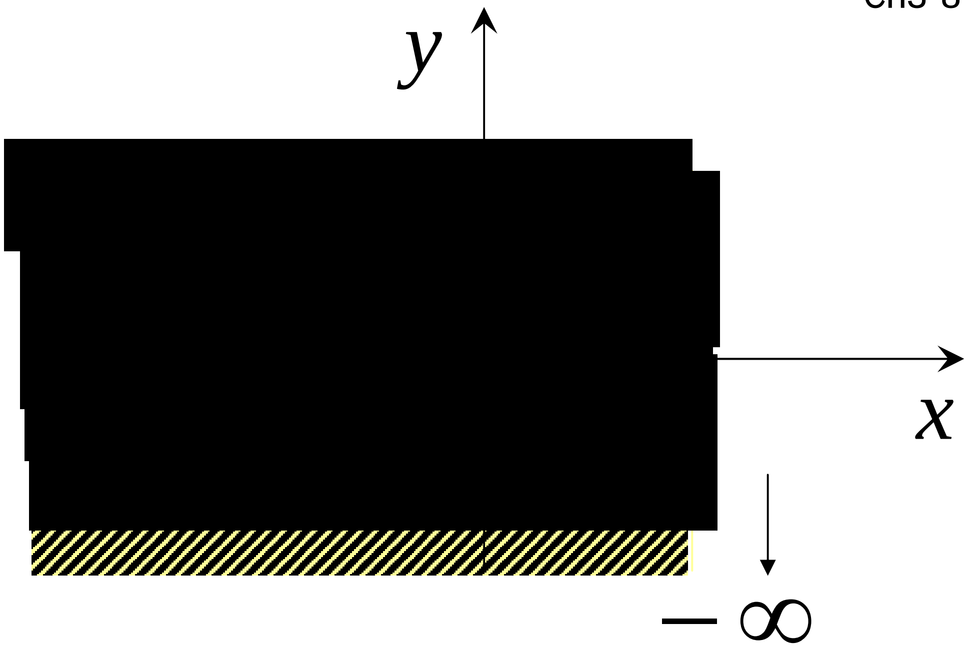
$$F(+\infty,+\infty)=1$$



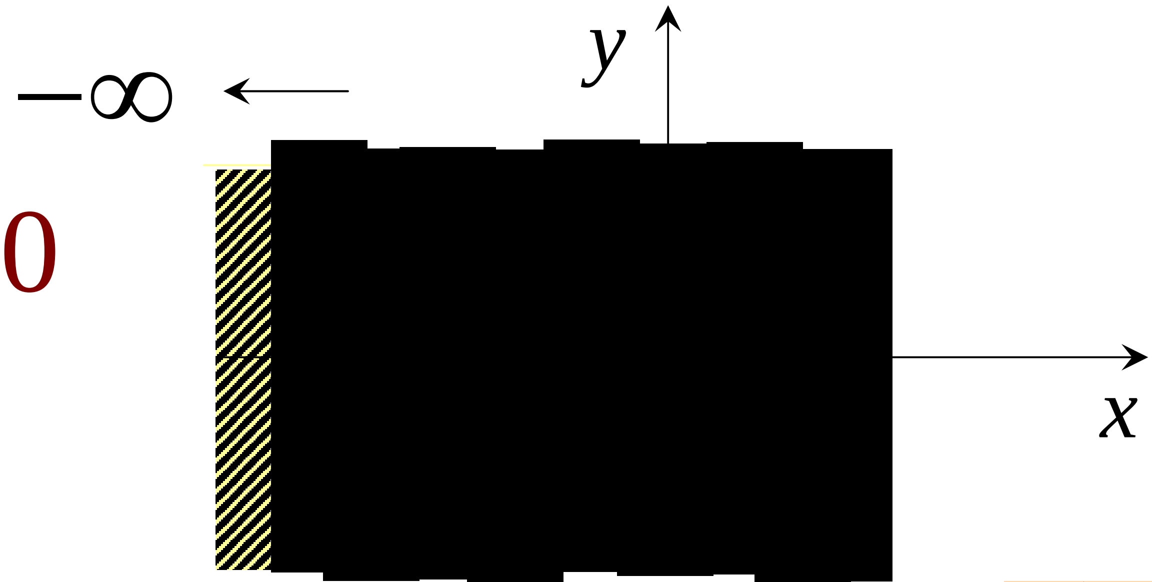
$$F(-\infty,-\infty)=0$$



$$F(x, -\infty) = 0$$



$$F(-\infty, y) = 0$$



② 对每个变量单调不减

固定 x，对任意的 $y_1 < y_2$，

$$F(x, y_1) \le F(x, y_2)$$

固定 y，对任意的 $x_1 < x_2$，

$$F(x_1, y) \le F(x_2, y)$$

③ 对每个变量右连续

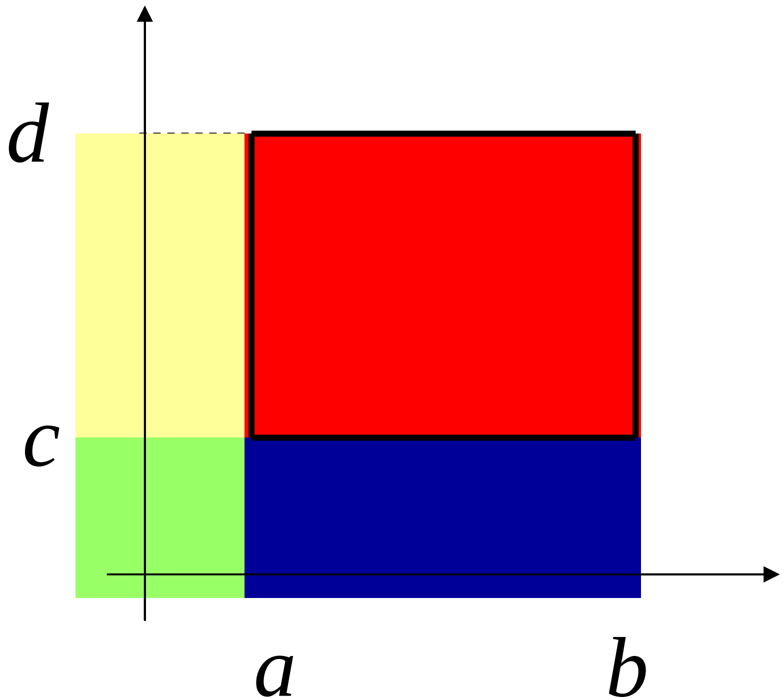
$$F(x_0, y_0) = F(x_0 + 0, y_0)$$

$$F(x_0, y_0) = F(x_0, y_0 + 0)$$

④ 对于任意 $\boldsymbol{a < b\,,\, c < d}$

$$F(b,d) - F(b,c) - F(a,d) + F(a,c) \geq 0$$

事实上



$$F(b,d) - F(b,c)$$

$$- F(a,d) + F(a,c)$$

$$= P\left(a < X \leq b, c < Y \leq d\right) \geq 0$$

例1 设

$$F(x,y)=\begin{cases}0, & x+y<1\\ 1, & x+y\geq 1\end{cases}$$

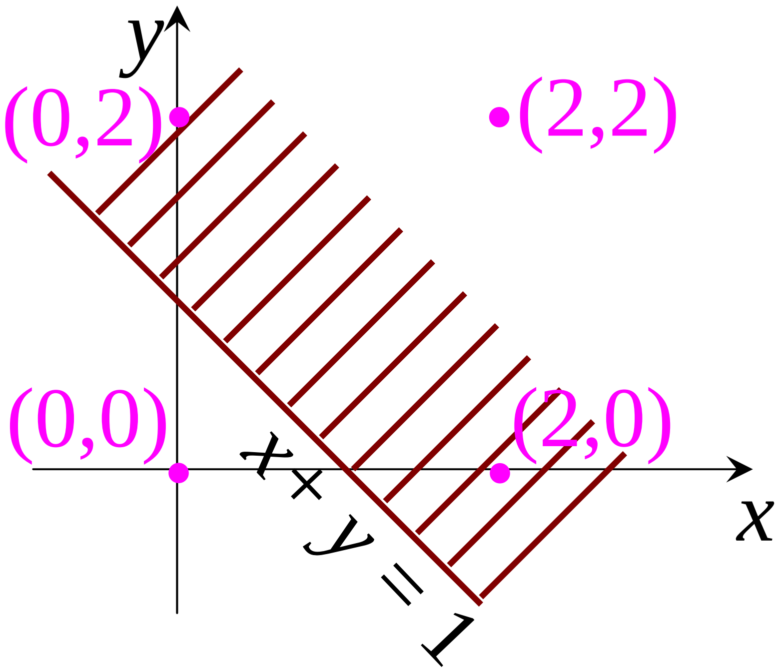
讨论$F(x,y)$能否成为二维r.v.的分布函数?

解 $F(2,2)-F(0,2)$

$-F(2,0)+F(0,0)$

$=1-1-1+0$

$=-1<0$



故$F(x,y)$不能作为某二维 r.v.的分布函数.

注意 对于二维 *r.v.*

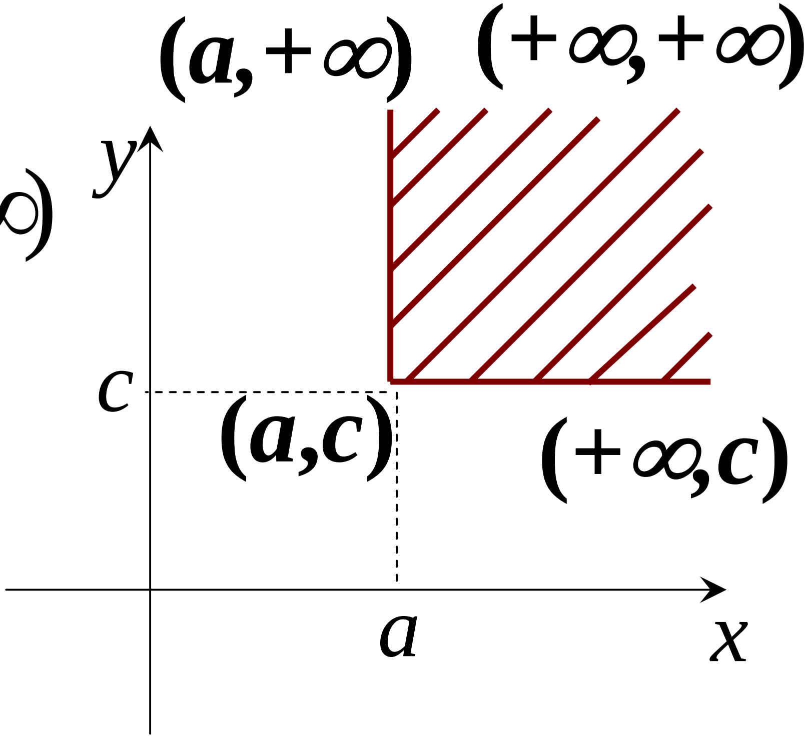
$$P(X > a, Y > c) \neq 1 - F(a,c)$$

$$P(X > a, Y > c)$$

$$= P(a < X < +\infty, c < Y < +\infty)$$

$$= 1 - F(+\infty, c)$$

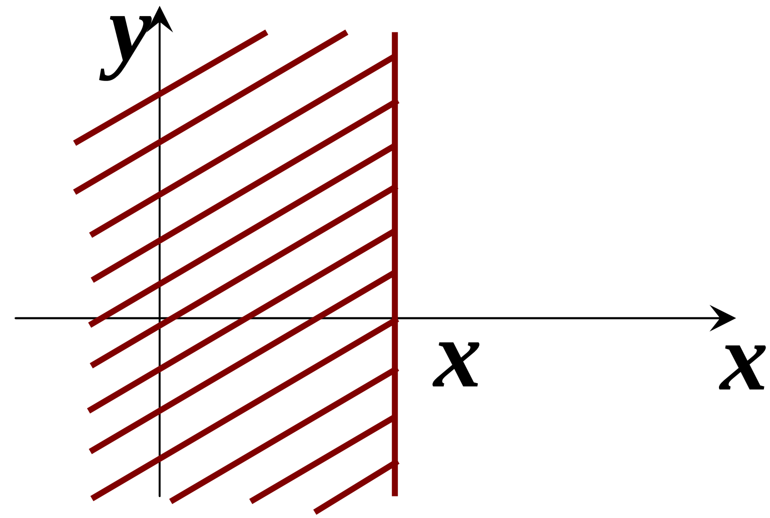
$$- F(a, +\infty) + F(a, c)$$



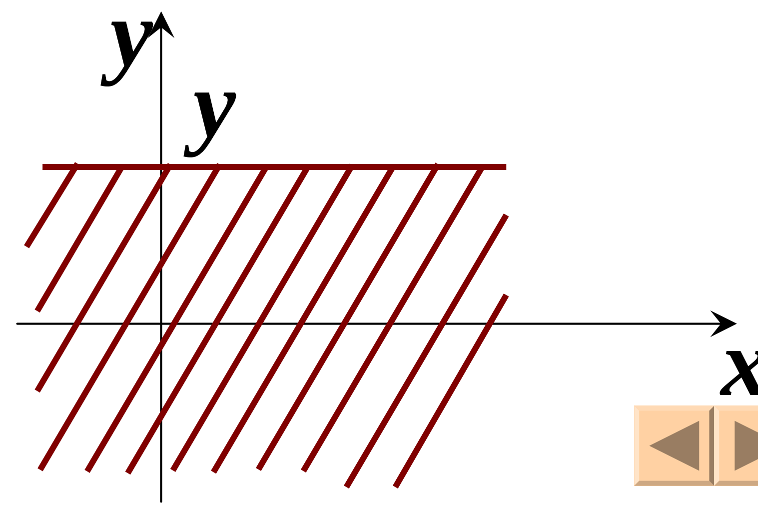
二维随机变量的边缘分布函数

由联合分布函数 $\Longrightarrow$ 边缘分布函数, 逆不真.

$$F_X(x)=P(X\le x)=P(X\le x, Y<+\infty)=F(x,+\infty)$$



$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X<+\infty, Y\le y)=F(+\infty, y)$$



例2 设随机变量(X,Y)的联合分布函数为

$$F(x,y)=A\left(B+\arctan\frac{x}{2}\right)\left(C+\arctan\frac{y}{2}\right)$$

$$-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty$$

其中A,B,C为常数.

(1) 确定A,B,C;

(2) 求X和Y的边缘分布函数;

(3) 求$P(X>2)$

解 (1) $$F(+\infty,+\infty)=A\left(B+\frac{\pi}{2}\right)\left(C+\frac{\pi}{2}\right)=1$$

$$F(-\infty,+\infty)=A\left(B-\frac{\pi}{2}\right)\left(C+\frac{\pi}{2}\right)=0$$

$$F(+\infty,-\infty)=A\left(B+\frac{\pi}{2}\right)\left(C-\frac{\pi}{2}\right)=0$$

$$\Rightarrow \quad B=\frac{\pi}{2},C=\frac{\pi}{2},A=\frac{1}{\pi^2}$$

(2) $$F_X(x)=F(x,+\infty)$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan\frac{x}{2}, \qquad -\infty<x<+\infty.$$

$$F_Y(y)=F(+\infty,y)$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan\frac{y}{2},\quad -\infty<y<+\infty.$$

(3) $P(X>2)=1-P(X\le 2)$
$$=1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan\frac{2}{2}\right)$$
$$=1/4.$$

可以将二维 *r.v.*及其边缘分布函数的概念推广到 *n* 维 *r.v.*及其联合分布函数与边缘分布函数

二维离散型 *r.v.*及其概率特性

定义 若二维 *r.v.*(X, Y)所有可能的取值为有限多个或无穷可列多个, 则称(X, Y) 为**二维离散型 *r.v.***

要描述二维离散型 *r.v.*的概率特性及其与每个 *r.v.*之间的关系常用其**联合概率分布**和**边缘概率分布**

联合分布律

设(X,Y)的所有可能的取值为

$$(x_i, y_j), \qquad i, j = 1,2,\cdots$$

则称

$$P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}, \quad i, j = 1,2,\cdots$$

为二维 $r.v.(X,Y)$ 的联合概率分布

也简称 概率分布 或 分布律

显然， $p_{ij} \geq 0, \qquad i, j = 1,2,\cdots$

$$\sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty} p_{ij} = 1$$

二维离散 *r.v.*的联合分布函数

$$F(x,y)=\sum_{x_i\le x}\sum_{y_j\le y}p_{ij},\quad -\infty<x\ ,\ y<+\infty.$$

已知联合分布律可以求出其联合分布函数

反之，由分布函数也可求出其联合分布律

$$P(X=x_i,Y=y_j)=F(x_i,y_j)-F(x_i,y_j-0)$$

$$-F(x_i-0,y_j)+F(x_i-0,y_j-0)$$

$$i,j=1,2,\cdots$$

二维离散 *r.v.* 的边缘分布律

$$P(X=x_i)=\sum_{j=1}^{+\infty}p_{ij}\overset{\text{记作}}{=}p_{i\bullet},\quad i=1,2,\cdots$$

$$P(Y=y_j)=\sum_{i=1}^{+\infty}p_{ij}\overset{\text{记作}}{=}p_{\bullet j},\quad j=1,2,\cdots$$

由联合分布可确定边缘分布, 其逆不真.

(X, Y) 的联合分布律

$Y \backslash X$	x_1	$\cdots$	x_i	$\cdots$
y_1	p_{11}	$\cdots$	p_{i1}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$
y_j	p_{1j}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$

联合分布律 及边缘分布律

$Y \backslash X$	x_1	$\cdots$	x_i	$\cdots$	$p_{\bullet j}$
y_1	p_{11}	$\cdots$	p_{i1}	$\cdots$	$p_{\bullet 1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
y_j	p_{1j}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	$p_{\bullet j}$
$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
$p_{i\bullet}$	$p_{1\bullet}$	$\cdots$	$p_{i\bullet}$	$\cdots$	1

$$p_{ij}=P(X=x_i, Y=y_j)$$ 的求法

(1) 利用古典概型直接求;

(2) 利用乘法公式

$$p_{ij}=P(X=x_i)P(Y=y_j \mid X=x_i).$$

例3 某校新选出的学生会 6 名女委员，文、理、工科各占1/6、1/3、1/2，现从中随机指定 2 人为学生会主席候选人. 令X，Y 分别为候选人中来自文、理科的人数.

求(X, Y) 的联合分布律和边缘分布律.

解 X 与Y 的可能取值分别为0，1与0，1，2.

由乘法公式

$$P(X=0,Y=0)=P(x=0)P(Y=0 \mid X=0)$$

$$=\frac{C_5^2}{C_6^2}\cdot\frac{C_3^2}{C_5^2}=3/15,$$

或由古典概型

$$P(X=0, Y=0)=C_3^2/C_6^2=3/15,$$

相仿有

$$P(X=0, Y=1)=C_2^1C_3^1/C_6^2=6/15,$$

$$P(X=0, Y=2)=C_2^2/C_6^2=1/15;$$

$$P(X=1, Y=0)=C_1^1C_3^1/C_6^2=3/15,$$

$$P(X=1, Y=1)=C_1^1C_2^1/C_6^2=2/15,$$

$$P(X=1, Y=2)=0.$$

故联合分布律与边缘分布律为

$X \backslash Y$	0	1	2	$p_{i\bullet}$
0	3/15	6/15	1/15	2/3
1	3/15	2/15	0	1/3
$p_{\bullet j}$	6/15	8/15	1/15	1

例4 二元两点分布

$Y \backslash X$ (p_{ij})	1	0	$p_{\bullet j}$
1	p	0	p
0	0	q	q
$p_{i\bullet}$	p	q	1

$$p+q=1,\quad 0<p<1$$

作业 P131 习题三

1　2　3

二维连续 r.v.及其概率特性

定义 设二维 r.v.(X,Y)的分布函数为 $F(x,y)$,若存在非负可积函数 $f(x,y)$,使得对于任意实数 x,y 有

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dvdu$$

则称(X,Y)为**二维连续型 r.v.**

$f(x,y)$ 为(X,Y)的**联合概率密度函数**

简称**概率密度函数**简记 p.d.f.

联合密度与联合分布函数的性质

$\boxed{1}$ $f(x,y) \geq 0$

$\boxed{2}$ $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dydx = 1$

除 **d.f.** 的一般性质外还有下述性质

$\boxed{3}$ 对每个变元连续，在 $f(x,y)$ 的连续点处

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = f(x,y)$$

从而有 $P(x < X \leq x+\Delta x, y < Y \leq y+\Delta y)$

$$\approx f(x,y)\Delta x \Delta y$$

$\boxed{4}$ $P(X=a, Y=b)=0$

$$P(X=a, -\infty<Y<+\infty)=0$$

$$P(-\infty<X<+\infty, Y=a)=0$$

若**G**是平面上的区域，则

$$P\big((X,Y)\in G\big)=\iint\limits_{G} f(x,y)\,dxdy$$

边缘分布函数与边缘 d.f.

$$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u,v)dvdu$$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,v)dv$$

$$F_Y(y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u,v)dudv$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(u,y)du$$

与离散型相同,已知联合分布可以求得边缘分布; 反之则不能唯一确定.

例5 设 **r.v.**(X,Y) 的联合 $d.f.$ 为

$$f(x,y)=\begin{cases} kxy, & 0\le x\le y, 0\le y\le 1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中 k 为常数. 求

(1)常数 k;

(2) $P(X+Y\ge 1)$, $P(X<0.5)$;

(3) 联合分布函数 $F(x,y)$;

(4) 边缘 $d.f.$ 与边缘分布函数

解 令 $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le y,\,0\le y\le 1\}$

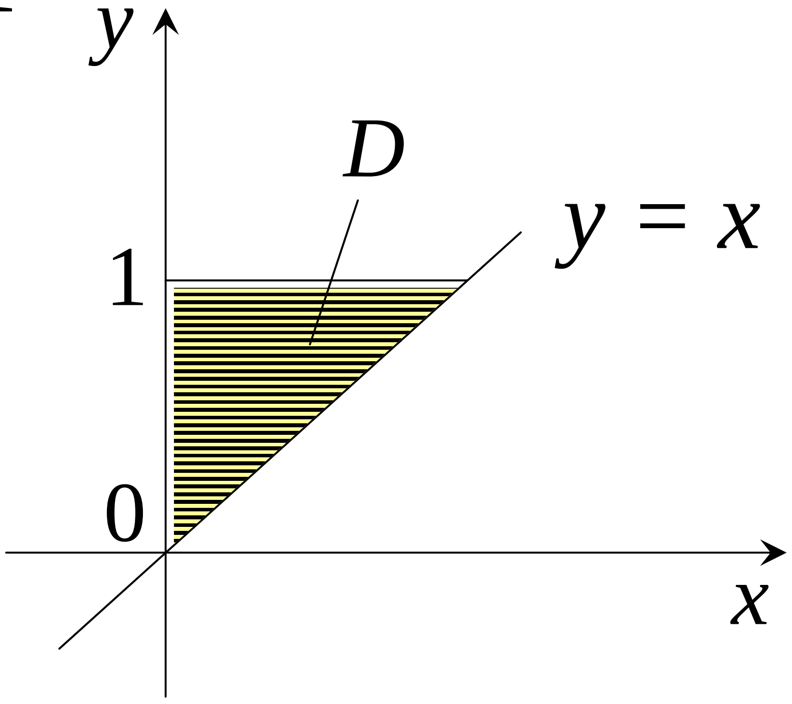
(1) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=1$

$\Longrightarrow \iint_D f(x,y)dxdy=1$

$\int_0^1 dy\int_0^y kxydx$

$=k\int_0^1 y\dfrac{y^2}{2}dy=\dfrac{k}{8}$

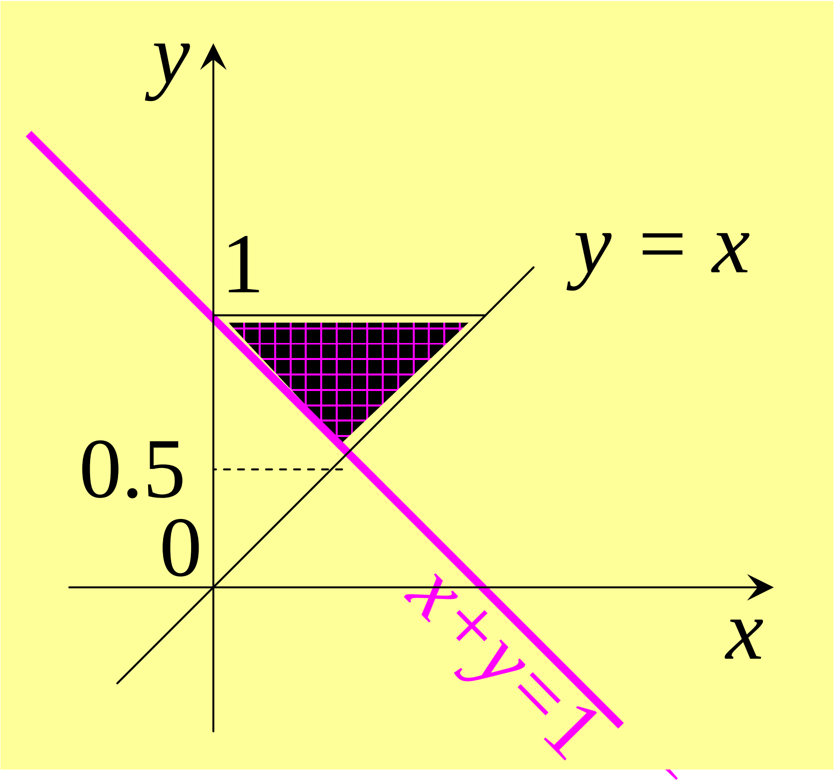
$\Longrightarrow\ k=8$

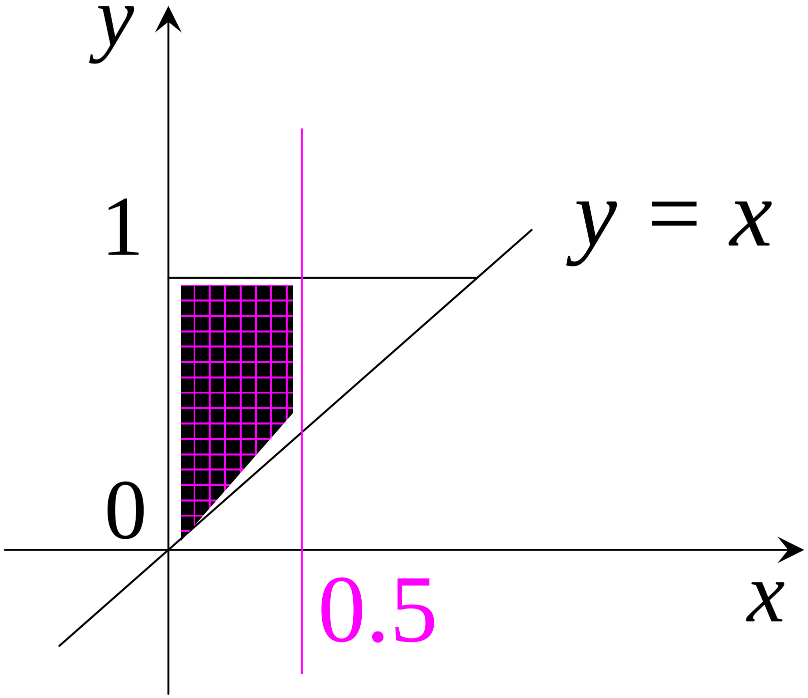


(2) $P(X+Y\geq 1)$

$$=\int_{0.5}^{1}dy\int_{1-y}^{y}8xydx$$

$$=5/6.$$



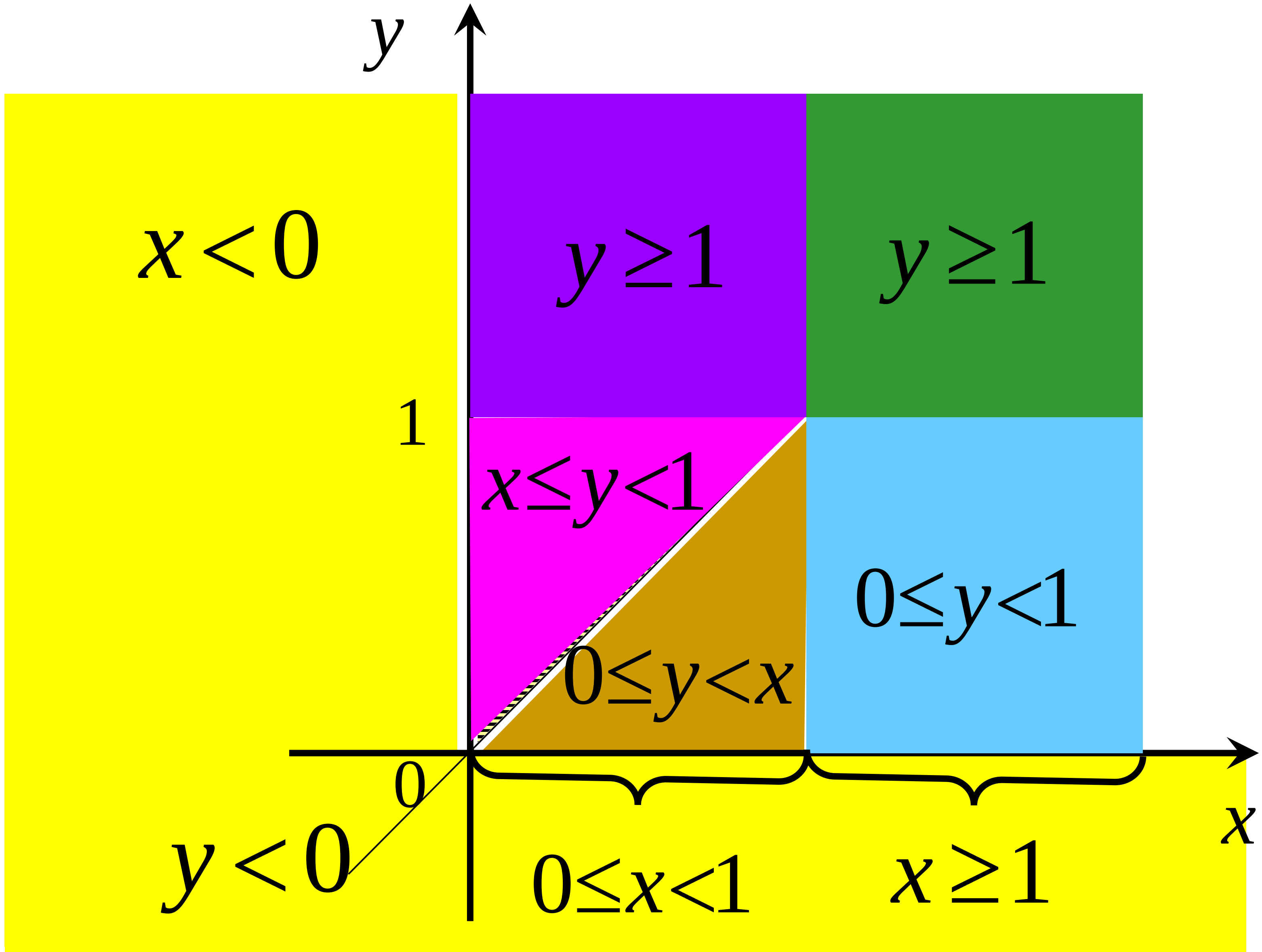


$P(X<0.5)$

$$=\int_{0}^{0.5}dx\int_{x}^{1}8xydy$$

$$=7/16.$$

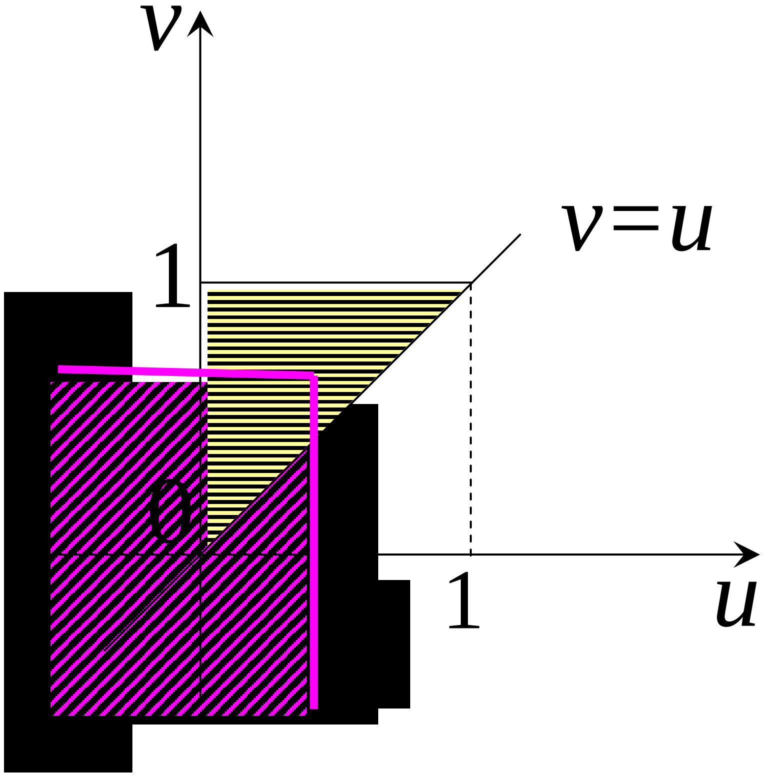
$F(x,y)$ 的分段区域



(3) $F(x,y)=P\left(X\le x,Y\le y\right)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)dvdu$

当 $x<0$ 或 $y<0$ 时，

$F(x,y)=0$



当 $0\le x<1$, $0\le y<x$ 时，

$$F(x,y)=\int_0^y dv\int_0^v 8uvdu=y^4$$

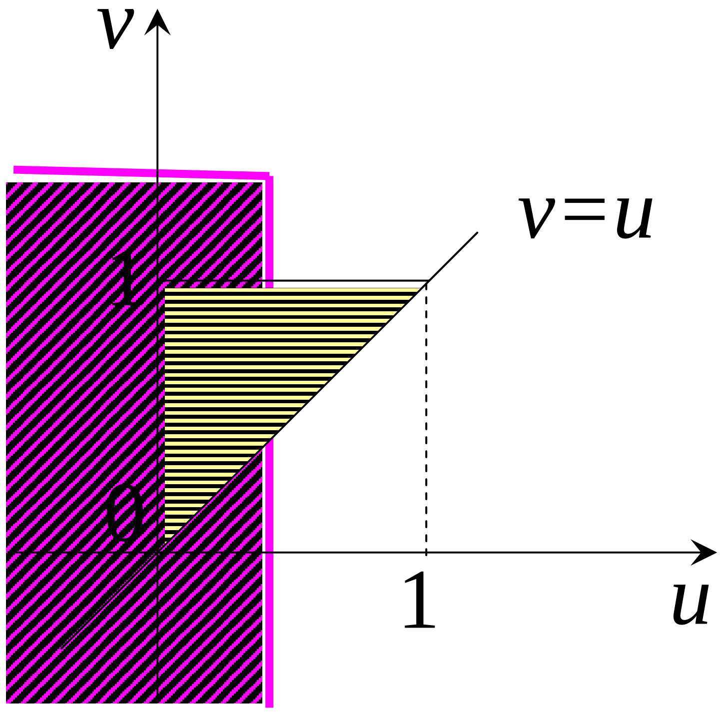
当 $0\le x<1$， $x\le y<1$ 时，

$$F(x,y)=\int_0^x du\int_u^y 8uvdv=2x^2y^2-x^4$$

当$0 \le x < 1, y \ge 1$时，

$$F(x,y) = \int_0^x du \int_u^1 8uv\,dv$$

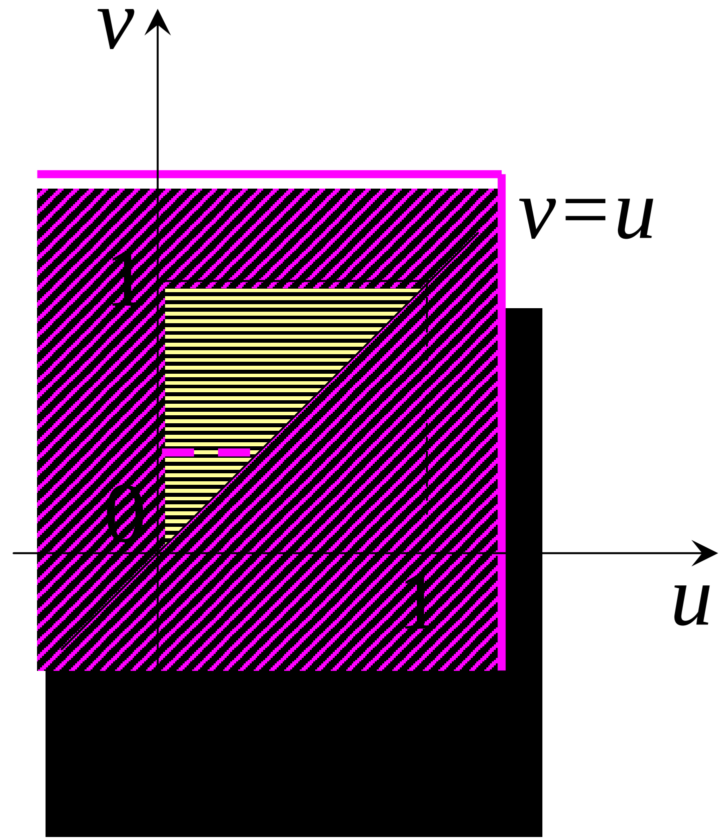
$$= 2x^2 - x^4$$



当$x \geq 1,\ 0 \leq y < 1$时，

$$F(x,y) = \int_0^y dv \int_0^v 8uv\,du$$

$$= y^4$$



当 $x \geq 1,\ y \geq 1$ 时，

$$F(x,y) = 1$$

$$F(x,y)=\begin{cases} 0, & x<0 \text{ 或 } y<0 \\ y^4, & 0\le x<1,\ 0\le y<x, \\ 2x^2y^2-y^4, & 0\le x<1,\ x\le y<1, \\ 2x^2-x^4, & 0\le x<1,\ y\ge 1, \\ y^4, & x\ge 1,\ 0\le y<1, \\ 1, & x\ge 1,\ y\ge 1, \end{cases}$$

(4) $F_X(x) = F(x, +\infty)$

$$= \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 2x^2 - x^4, & 0 \le x < 1, \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$$

$F_Y(y) = F(+\infty, y)$

$$= \begin{cases} 0, & y < 0 \\ y^4, & 0 \le y < 1, \\ 1, & y \ge 1 \end{cases}$$

$$f_X(x)=\begin{cases}4x-4x^3, & 0\le x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

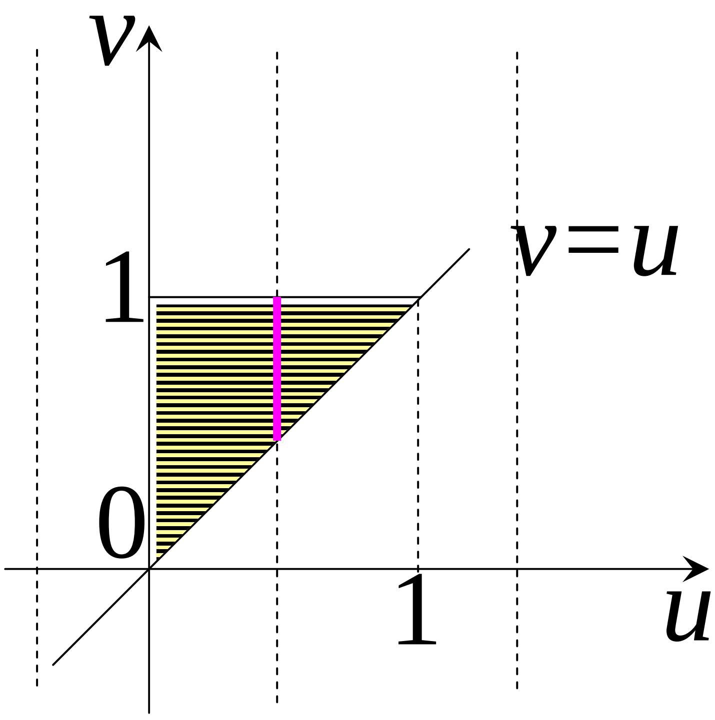
$$f_Y(y)=\begin{cases}4y^3, & 0\le y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

也可直接由联合$d.f.$求边缘$d.f.$
再积分求边缘分布函数．例如

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,v)dv$$

$$=\begin{cases} \int_x^1 8xvdv & 0\le x<1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} 4x-4x^3, & 0\le x<1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$$



作业 P.132 习题三

6	7
10	11

常用连续型二维随机变量分布

◆ 区域G上的**均匀分布**，记作$U(G)$

G是平面上的有界区域，面积为A

若r.v.(X,Y)的联合d.f.为

$$f(x,y)=\begin{cases}1/A, & (x,y)\in G\\ 0, & 其他\end{cases}$$

则称(X,Y)服从区域G上的均匀分布

- 若(X,Y)服从区域G上的均匀分布，则 $\forall\, G_1 \subseteq G$，设$G_1$的面积为$A_1$，

$$P\big((X,Y)\in G_1\big)=\frac{A_1}{A}$$

- 边平行于坐标轴的矩形域上的均匀分布的边缘分布仍为均匀分布

例6 设$(X,Y)\sim G$上的均匀分布,

$$G=\{(x,y)\mid 0\le y\le x, 0\le x\le 1\}$$

求

(1) $f(x,y)$;

(2) $P(Y>X^2)$;

(3) (X,Y)在平面上的落点到 y 轴距离小于0.3的概率.

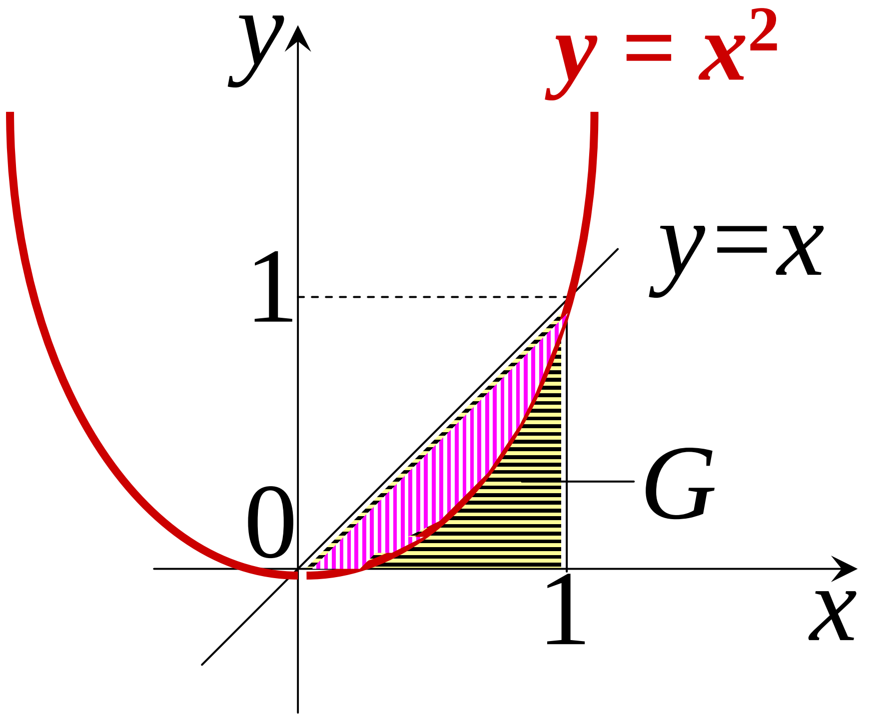
解 (1)

$$f(x,y)=\begin{cases}2, & 0\le y\le x, 0\le x\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

(2) $P(Y>X^2)$

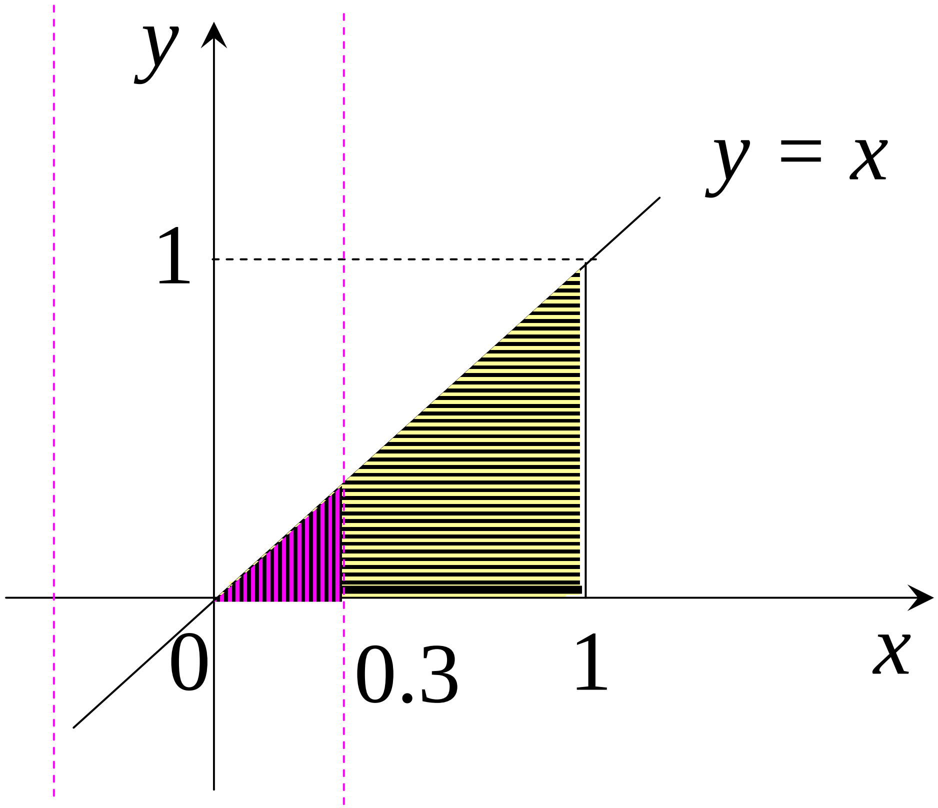
$$=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} 2dy$$

$=1/3.$



$$(3)\ P(|X| < 0.3) = P(-0.3 < X < 0.3)$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (0.3)^2 = 0.09$$



二维正态分布

若$r.v.(X,Y)$的联合为

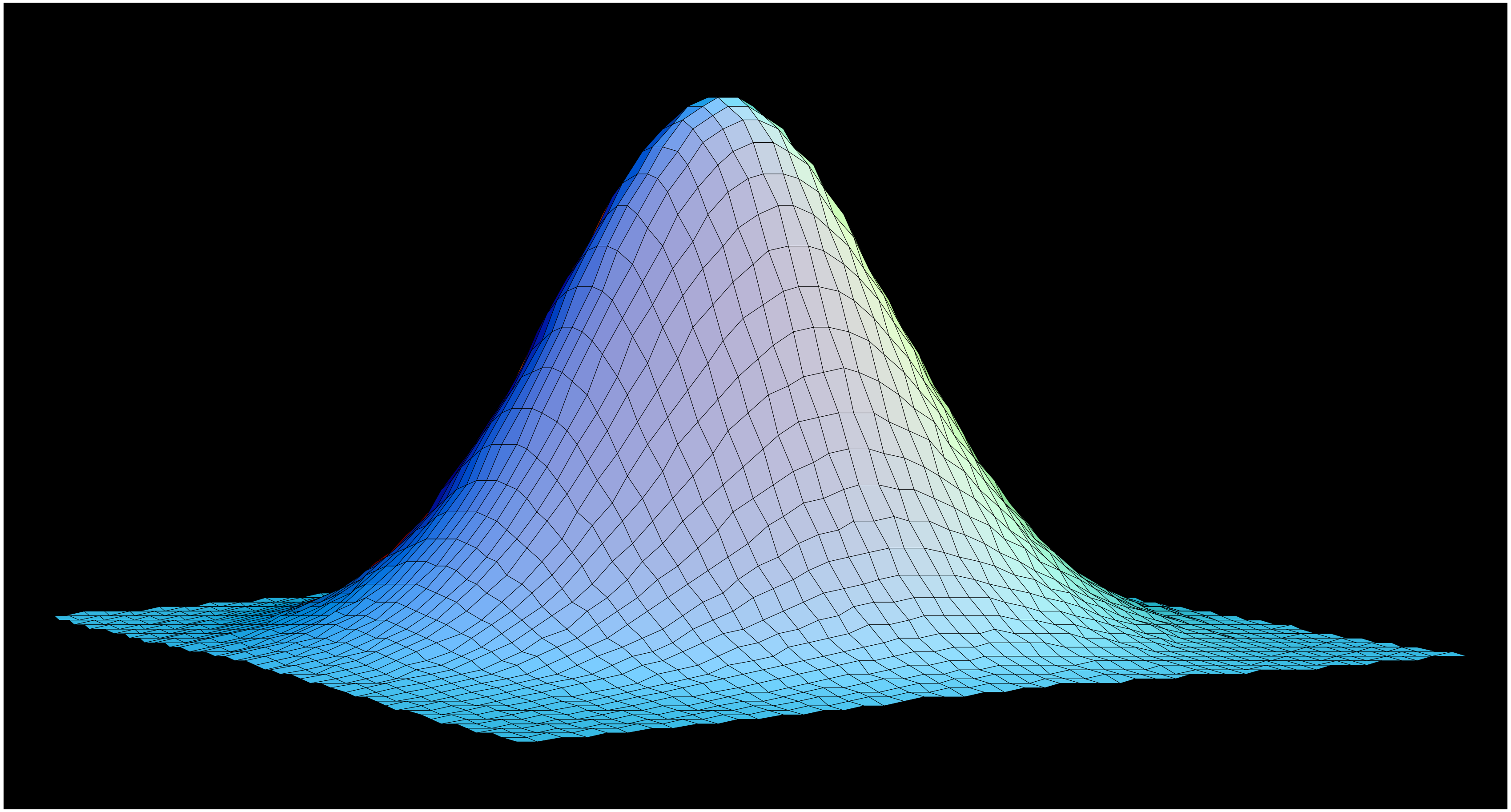
$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\times e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

$$-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty$$

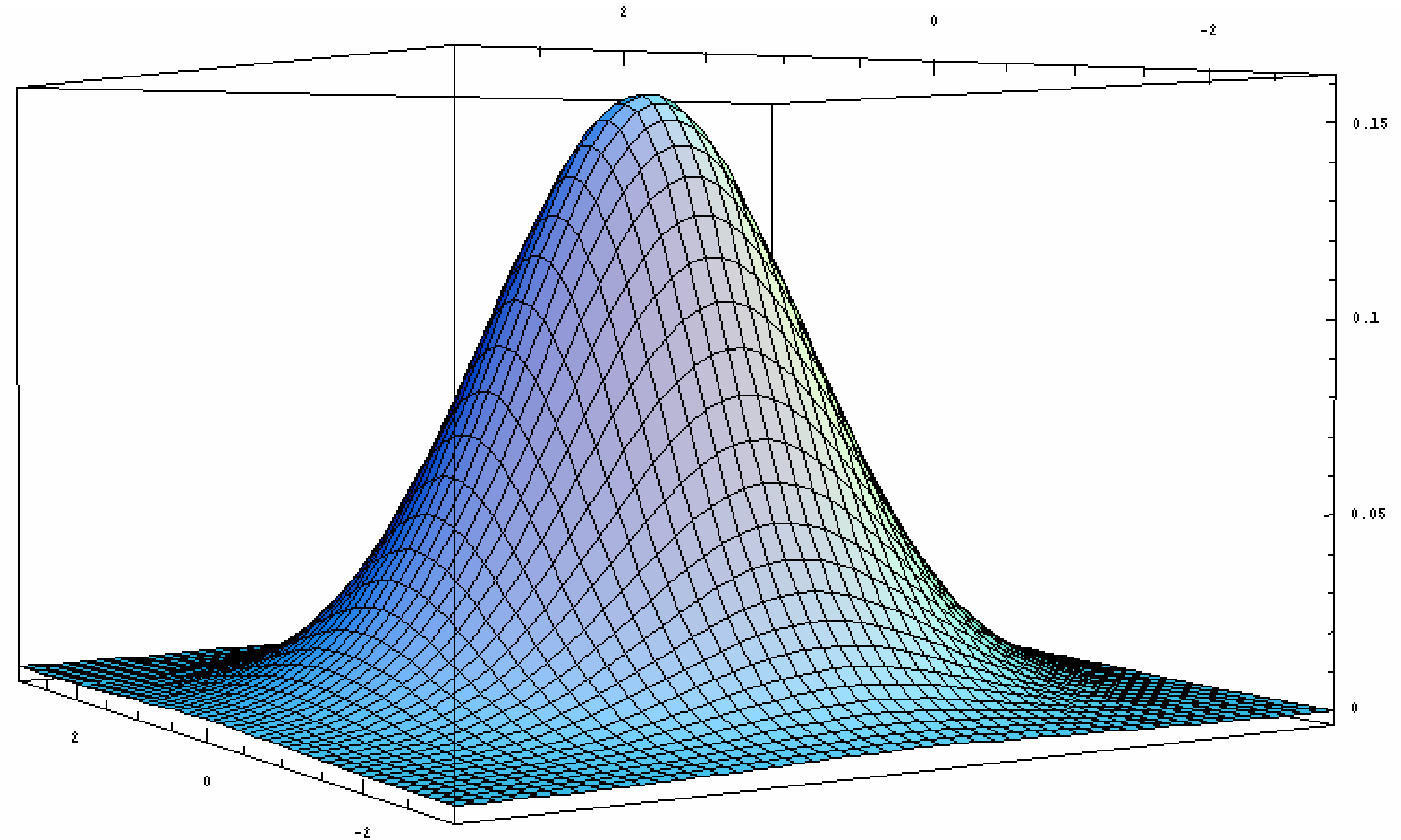
则称(X,Y)服从参数为$\mu_1,\sigma_1^2,\mu_2,\sigma_2^2,\rho$的正态分布，记作$(X,Y)\sim N(\mu_1,\sigma_1^2;\mu_2,\sigma_2^2;\rho)$

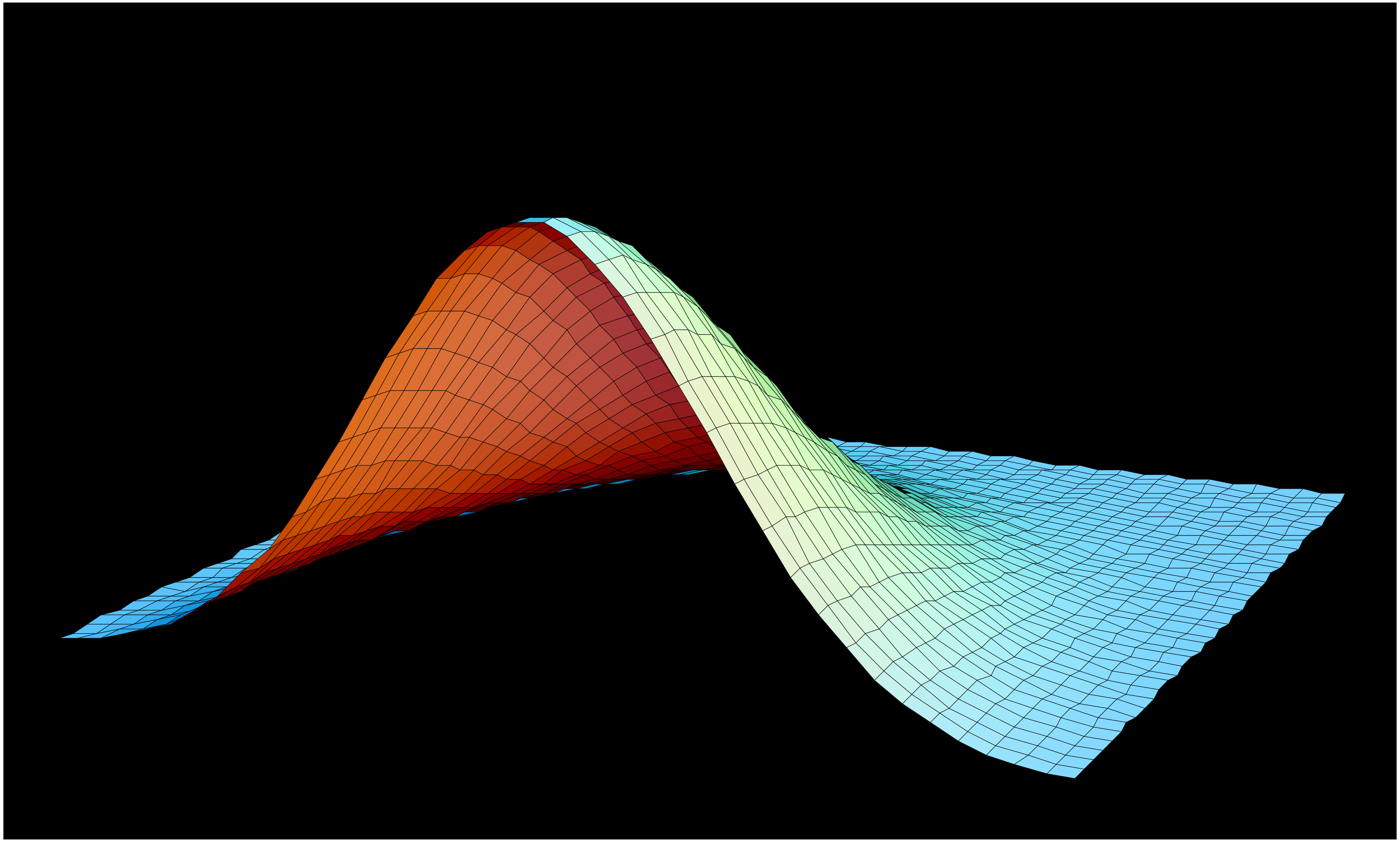
其中$\sigma_1,\sigma_2>0$，$-1<\rho<1$.

```
Clear[f,x,y]

f[x_,y_]:=Exp[-(x^2+y^2)/2]/(2Pi)

Plot3D[f[x,y],{x,-3,3},{y,-3,3},ViewPoint->{-2.869, 1.790, 0.110},

  AspectRatio->0.6,PlotPoints->30];
```



二维正态分布图


2
0
-2
0.15
0.1
0.05
0
2
0
-2



二维正态分布剖面图

正态分布的边缘分布仍为正态分布

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}},-\infty<x<+\infty$$

$$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}},-\infty<y<+\infty$$

令 $B=\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2\\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{pmatrix}$ $B^{-1}=\dfrac{1}{1-\rho^2}\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\sigma_1^2} & -\dfrac{\rho}{\sigma_1\sigma_2}\\ -\dfrac{\rho}{\sigma_1\sigma_2} & \dfrac{1}{\sigma_2^2}\end{pmatrix}=A$

$|B|=(1-\rho^2)\sigma_1^2\sigma_2^2>0$ B 为正定矩阵

再令 $X=(x-\mu_1, y-\mu_2)^T$ 则二维正态联合 $d.f.$ 为

$$f(x,y)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^2|B|^{\frac{1}{2}}}e^{-\frac{1}{2}X^TAX}$$

推广 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\dfrac{1}{(\sqrt{2\pi})^n|B|^{\frac{1}{n}}}e^{-\frac{1}{2}X^TAX}$

本节结束

第7周

问题

某中外合资公司准备通过考试招工200名，其中180名正式工，20名临时工. 报考人数为1684名, 考试满分为300分. 阅卷后人事部门公布如下信息: 平均成绩是178分，270以上的高分有32名. 考生小王的成绩是233分，他能否被录取？如被录取能否是正式工？