§3.3 随机变量的独立性

——将事件独立性推广到 r.v.

两个 r.v. 的相互独立性

定义 设(X,Y)为二维 r.v. 若对任何实数 x, y 都有

$$P(X \le x, Y \le y) = P(X \le x)P(Y \le y)$$

则称 r.v. X 和Y 相互独立

由定义知

二维 r.v. (*X*, *Y*) 相互独立

$$\Longleftrightarrow \quad F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \forall a<b, c<d$$

$$P(a<X\le b, c<Y\le d)$$

$$=P(a<X\le b)P(c<Y\le d)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \forall a, c\in R$$

$$P(X>a, Y>c)=P(X>a)P(Y>c)$$

离散型 X与Y 独立 $\Longleftrightarrow$ 对一切 i,j 有

$$p_{ij} = p_{i\bullet} p_{\bullet j}$$

即 $$P(X=x_i, Y=y_j) = P(X=x_i)P(Y=y_j)$$

连续型 X与Y 独立 $\Longleftrightarrow$ 对任何 x, y 有

$$f(x,y) = f_X(x) f_Y(y) \quad (a.e.)$$

二维随机变量 (X, Y) 相互独立,
则边缘分布完全确定联合分布

二维连续 r.v. (X,Y) 相互独立

$$f_X(x) = f_{X|Y}(x|y) \quad (f_Y(y) > 0)$$

$$f_Y(y) = f_{Y|X}(y|x) \quad (f_X(x) > 0)$$

命题 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\sigma_1^2;\mu_2,\sigma_2^2;\rho)$ 相互独立

$$\Longleftrightarrow \quad \rho = 0$$

证 $\longrightarrow$ 对任何 x,y 有

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$$

取 $x=\mu_1, y=\mu_2$

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}$$

故 $\rho = 0$

将 $\rho = 0$ 代入 $f(x,y)$ 即得

$$f(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$$

例1 已知 (X, Y) 的联合 d.f.为

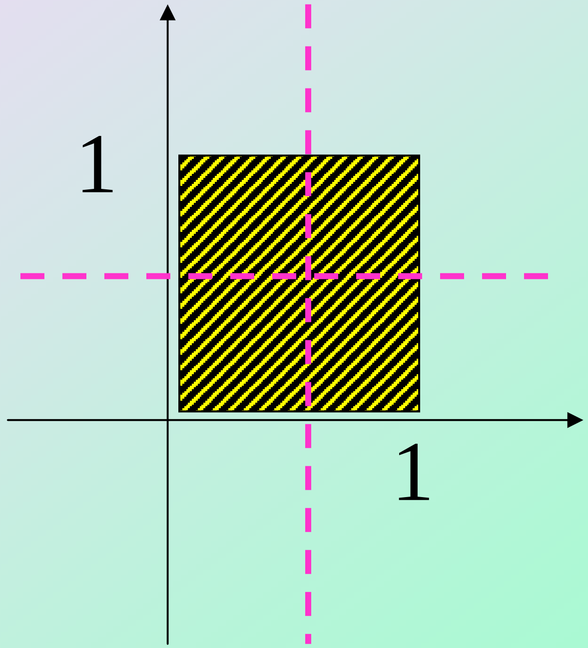
(1) $$f_1(x,y)=\begin{cases}4xy, & 0<x<1, 0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

(2) $$f_2(x,y)=\begin{cases}8xy, & 0<x<y, 0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

讨论X ,Y 是否独立?

解

(1) 由图知边缘 d.f. 为



$$f_X(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

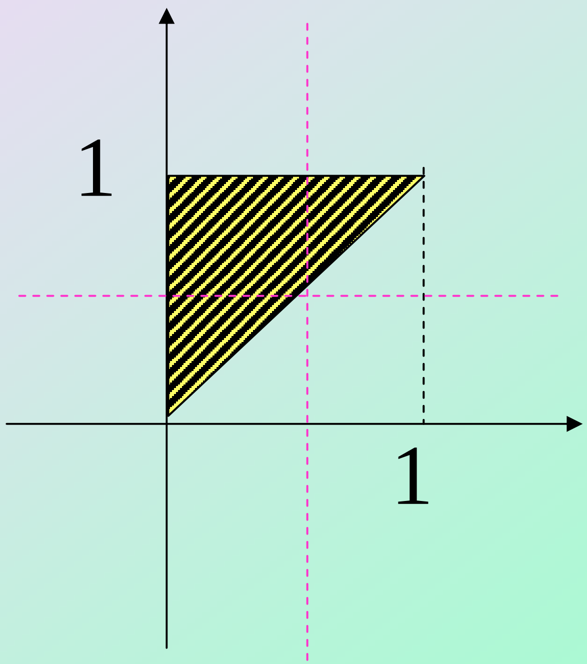
$$f_Y(y)=\begin{cases}2y, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

显然，

$$f_1(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$$

故 X ,Y 相互独立

(2) 由图知边缘 d.f. 为



$$f_X(x)=\begin{cases}4x(1-x^2), & 0<x<1, \\ 0, & 其他\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}4y^3, & 0<y<1, \\ 0, & 其他\end{cases}$$

显然，

$$f_2(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$$

故 X,Y 不独立

判连续型 r.v. 相互独立的有关命题

设$f(x,y)$是连续二维 r.v. (X,Y)的联合 d.f. $r(x), g(y)$ 为非负可积函数, 且

$$f(x,y)=r(x)g(y) \qquad (a.e.)$$

则 X, Y 相互独立

且

$$f_X(x)=\frac{r(x)}{\int_{-\infty}^{+\infty} r(x)dx} \qquad (a.e.)$$

$$f_Y(y)=\frac{g(y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} g(y)dy} \qquad (a.e.)$$

利用此结果,不需计算即可得出(1)中的 r.v. X 与 Y 是相互独立的.

再如, 服从矩形域$\{(x,y)|\ a<x<b,\ c<y<d\}$上均匀分布的二维 r.v.$(X, Y)$,

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{(b-a)(d-c)} & a<x<b, c<y<d \\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

X, Y 是独立，且其边缘分布也是均匀分布

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b \\ 0, & \text{其他}\end{cases} \qquad f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{d-c}, & c<y<d \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

若

$$f(x,y)=\begin{cases} 6e^{-2x-3y} & x>0, y>0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

则X ,Y 是相互独立的,且其边缘分布为

$$f_X(x)=\begin{cases} 2e^{-2x}, & x>0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases} 3e^{-3y}, & y>0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

若

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-3y} & -1<x<2, y>0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

则 X, Y 是相互独立的，且其边缘分布为

$$f_X(x)=\begin{cases} \frac{1}{3}, & -1<x<2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases} 3e^{-3y}, & y>0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

对于分布函数也有类似结果

设$F(x, y)$是二维连续 r.v. (X, Y)的联合分布函数, 则(X, Y)相互独立的充要条件为

$$F(x, y) = R(x)G(y)$$

且

$$F_X(x) = \frac{R(x)}{R(+\infty)}$$

$$F_Y(y) = \frac{G(y)}{G(+\infty)}$$

判独立的一个重要命题

设 X, Y 为相互独立的 r.v. $u(x), v(y)$ 为连续函数，则 $U=u(X)$, $V=v(Y)$ 也相互独立. 即

独立 r.v.的连续函数仍独立.

下面予以证明.

事实上,

设 X 与 Y 的 d.f. 分别为 $f_X(x)$, $f_Y(y)$, 则

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$$

因此, $$F_{UV}(u,v)=P(U\le u,V\le v)$$

$$=P(u(X)\le u,v(Y)\le v)$$

$$=\iint\limits_{\substack{u(x)\le u\\ v(y)\le v}} f_X(x)f_Y(y)dxdy=\int\limits_{u(x)\le u} f_X(x)dx\int\limits_{v(y)\le v} f_Y(y)dy$$

$$=P(u(X)\le u)P(v(Y)\le v)=F_U(u)F_V(v)$$

由命题知 若 X, Y 为相互独立的 r.v.

则 $aX + b, cY + d$ 也相互独立;

X^2, Y^2 也相互独立;

随机变量相互独立的概念可以推广到 n 维随机变量

若 $$P(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \cdots; X_n \le x_n)$$

$$= P(X_1 \le x_1) P(X_2 \le x_2) \cdots P(X_n \le x_n)$$

则称 r.v. $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立

注意 若两随机变量相互独立,且又有相同的分布,不能说这两个随机变量相等. 如

X	-1	1
P	0.5	0.5

Y	-1	1
P	0.5	0.5

X ,Y 相互独立，则

p_{ij} Y \ X	-1	1
-1	0.25	0.25
1	0.25	0.25

由左表易得：

$P(X=Y)=$

$P(X=-1, Y=-1)$

$+P(X=1, Y=1)$

$=0.5$

故不能说 $X = Y$.

作业 P.133 习题三

12

13

15

18