第四章习题课

《概率统计》

问题1

数学期望定义中为何要求绝对收敛？

我们通过一个期望不存在的例子来说明这个问题.

设 X 的分布律为 $p_k = P(X = x_k) = 1/2^k$

其中 $x_k = (-1)^{k+1} 2^k / k \qquad k = 1, 2, \cdots$

则 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} / k$

$= 1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + \cdots = \ln 2.$ (J)

但由于 $\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|p_k=\sum_{k=1}^{\infty}1/k=\infty$

因此 X 的数学期望不存在. 事实上由微积分知识可知, 如果把（J）式左边级数中的项进行重排可能收敛于不同的数，例如

$$1+1/3-1/2+1/5+1/7-1/4+\cdots=1.5\ln 2.$$

$$1-1/2-1/4+1/3-1/6-1/8+\cdots=0.5\ln 2.$$

随机变量的数学期望只能是一个数, 因此期望定义中要求的绝对收敛是

必要的，它可以保证顺序的变化不影响数学期望中级数的收敛性.

问题2 书中方差性质4如何证明？

$$D(X)=0 \Leftrightarrow P(X=C)=1$$

证 先证必要性 当 $D(X)=E[X-E(X)]^2=0$ 时，

记 $E(X)=C$. 若结论不成立，则

$P(X=C)<1$ 或等价地 $P(X\neq C)>0$

于是

$$D(X)=(x-C)^2P(X=C)+\sum_{x:\,x\neq C}(x-C)^2P(X=x)$$

右端第二项和式中至少有一项

$$P(X=a)>0, \qquad a \neq C$$

从而对应的 $(a-C)^2>0$, 因此

$$D(X)=(a-C)^2 P(X=a)>0$$

与已知矛盾, 所以 $P(X=C)=1.$

再证充分性　当 $P(X=C)=1$ 时,

$$E(X)=C \cdot 1=C, \quad E(X^2)=C^2 \cdot 1=C^2,$$

则 $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=C^2-C^2=0.$

问题3 方差不存在的随机变量，其期望是否也不存在？

同学甲答 是. 因为由 $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$.

得 $$E(X)=\pm\sqrt{E(X^2)-D(X)}$$

右边 $D(X)$ 不存在则左边 $E(X)$ 也不能存在.

同学乙答 否. 因为二阶中心矩不存在并不能推出一阶原点矩不存在.

两种回答究竟谁对？

同学乙回答得对

例如 $X \sim t(n)$ —— 自由度为 n 的分布.

当 $n>2$ 时, $E(X)=0,\ D(X)=E(X^2)=\dfrac{n}{n-2}$

当 $n=2$ 时, $E(X)=0,\ D(X)=\infty.$

4-2

解

X	4	5	6	7
p	1/8	1/4	5/16	5/16

$$E(X)=\frac{8}{16}+\frac{20}{16}+\frac{30}{16}+\frac{35}{16}=\frac{93}{16}\approx 5.81$$

解二　X 的分布律为,

$$P(X=k)=C_{k-1}^{3}(0.5)^{3}\cdot(0.5)^{k-4},\ k=4,5,6,7.$$

$$E(X)=\sum_{k=4}^{7}k\,p_k=\frac{93}{16}\approx 5.81$$

$\boxed{4-5}$ 设 X 表示电梯需停次数, 则

X	1	2	3	$\cdots$	m
p	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n-1}$	$\frac{1}{n-2}$	$\cdots$	$\frac{1}{n-m}$?

$$E(X) \cancel{=} \frac{1}{n} + \frac{2}{n-1} + \frac{3}{n-2} + \cdots + \frac{m}{n-m}$$

$$\cancel{=} n\left[1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^m\right].$$

概 率怎能为负！
(若n<m)

解

$$设\ X_i=\begin{cases}1, & 电梯在第\ i\ 层停\\ 0, & 电梯在第\ i\ 层不停\end{cases}\qquad i=1\sim n$$

设 X 表示电梯需停次数，则 $X=\sum_{i=1}^{n}X_i$

X_i	1	0
p	$1-\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^m$	$\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^m$

$$E(X_i)=1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^m \qquad i=1\sim n$$

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=n\left[1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^m\right].$$

$\boxed{\textbf{4 - 9}}$ 设 X_i 表示第 i 个人摸到的红球数，设 X 表示 n 个人共摸到的红球数，则有

X_i	0	1	2
p	$\dfrac{C_3^2}{C_5^2}=0.3$	$\dfrac{C_2^1 C_3^1}{C_5^2}=0.6$	$\dfrac{1}{C_5^2}=0.1$

$$E(X_i)=0.8 \Rightarrow E(X)=\sum_{i=1}^{n} E(X_i)=0.8n$$

$$D(X)=\underline{\underline{E(X^2)}}-(E(X))^2$$

$$\overset{?}{=}\underline{\underline{n(4\times 0.1+1\times 0.6+0\times 0.3)}}-(0.8n)^2$$

$$=n-0.64\cancel{n^2}$$

还有同学无计算 $E(X^2)$的过程

$$D(X)=E(X^2)-(E(X))^2 \cancel{=} 0.36n^2$$

$E(X^2)$ 的正确计算

$$E(X^2)=E(\sum_{i=1}^{n}X_i)^2=E(\sum_{i=1}^{n}X_i^2+2\sum_{1\le i<j\le n}X_iX_j)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)+2\sum_{1\le i<j\le n}E(X_i)E(X_j)$$

$$=n+2C_n^2(0.8)^2=0.36n+0.64n^2$$

$$D(X)=E(X^2)-(E(X))^2=0.36n$$

解法二

X_i	0	1	2
p	$\dfrac{C_3^2}{C_5^2}=0.3$	$\dfrac{C_2^1C_3^1}{C_5^2}=0.6$	$\dfrac{1}{C_5^2}=0.1$

$$E(X_i)=0.8,\quad E(X_i^2)=1^2\times0.6+2^2\times0.1=1$$

$$D(X_i)=E(X_i^2)-(E(X_i))^2=1-0.64=0.36$$

$$D(X)=D(\sum_{i=1}^{n}X_i)=\sum_{i=1}^{n}D(X_i)=0.36n$$

4-10 设 X 表示试开次数，则其分布律为

X	1	2	3	$\cdots\cdots$	n
p	$\frac{1}{n}$	$\frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}$	$\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{1}{n-2}$	$\cdots\cdots$	$\frac{1}{n}$

$$E(X)=(1+2+\cdots+n)\frac{1}{n}=\frac{n+1}{2}$$

$$E(X^2)=(1^2+2^2+\cdots+n^2)\frac{1}{n}$$

$$=\frac{1}{6}(n+1)(2n+1)$$

$$D(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\frac{n^2-1}{12}$$

$\boxed{4-16}$ 设 乘客在第 X_i 分钟 到达车站，到达概率为 $1/60$. $i=1\sim 4$.

无道理！

当 $0<x_1<10$时 $E(X_1)=\dfrac{1+2+\cdots+10}{60}=\dfrac{11}{12}$

当$10<x_2<30$时 $E(X_2)=\dfrac{1+2+\cdots+20}{60}=\dfrac{7}{2}$

当$30<x_3<55$时 $E(X_3)=\dfrac{1+2+\cdots+25}{60}=\dfrac{65}{12}$

当$55<x_4<60$时 $E(X_4)=\dfrac{10+11+\cdots+15}{60}=\dfrac{5}{4}$

$$E(X)=E\sum_{i=1}^{4}X_i=\sum_{i=1}^{4}E(X_i)\overset{?}{=}10分25秒$$

以上解法像模像样, 答案也与书后相同, 很容易获得助教(研究生)的打✓

即使按错误的推导, 也应为

$$\sum_{i=1}^{4}E(X_i)=\frac{133}{12}.\ (\neq 10分25秒)$$

本解法的最大错误在于 $E(X_i)$ 是表示到达车站时间的数学期望, 而不是等候时间的数学期望.

$$E(X)=(0+1+2+\cdots+1199)/3600$$

$$+(0+1+2+\cdots+1499)/3600$$

$$+(0+1+2+\cdots+899)/3600$$

$$=624.5\approx 10\text{分}25\text{秒}.$$

正确解 设 T 为 乘客 到达车站的时间，

则 $T \sim U(0, 60]$

$$f_T(t) = \begin{cases} \frac{1}{60} & 0 < t \le 60 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

乘客需等候的时间为

$$g(T) = \begin{cases} 10 - T & 0 < T \le 10 \\ 30 - T & 10 < T \le 30 \\ 55 - T & 30 < T \le 55 \\ 70 - T & 55 < T \le 60 \end{cases}$$

$$E[g(T)]=\int_{-\infty}^{\infty}g(t)f(t)dt$$

$$=\frac{1}{60}[\int_{0}^{10}(10-t)dt+\int_{10}^{30}(30-t)dt$$

$$+\int_{30}^{55}(55-t)dt+\int_{55}^{60}(70-t)dt$$

$$=\frac{625}{60}=10\text{分}25\text{秒}$$

下面解法二由 **3503** 班 梁俊睿 提供

解法二 设乘客需等候的时间为 T，则

$$T \sim f(t)=\begin{cases} 3A & 0<t\le 15 \\ 2A & 15<t\le 20 \\ A & 20<t\le 25 \end{cases}$$

A 为待定系数

由 $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 60A = 1 \Rightarrow A=\dfrac{1}{60}$

$$\therefore E(T)=\int_{-\infty}^{\infty} tf(t)dt$$

$$=\int_0^{15}\frac{t}{20}dt+\int_{15}^{20}\frac{t}{30}dt+\int_{20}^{25}\frac{t}{60}dt$$

$$=\frac{625}{60}=10\text{分}25\text{秒}$$

4 – 21 证(1)由题设 $X \sim U[\cancel{a,b}]$

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a<x<b\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int_a^b \frac{1}{b-a}dx=1$$

$$a=\int_a^b \frac{a}{b-a}dx \le \int_a^b \frac{x}{b-a}dx=E(X)$$

$$b=\int_a^b \frac{b}{b-a}dx \ge \int_a^b \frac{x}{b-a}dx=E(X)$$

$$\therefore\ a\le E(X)\le b$$

正确证明

$$a=\int_a^b af(x)dx\le\int_a^b xf(x)dx=E(X)$$

$$b=\int_a^b bf(x)dx\ge\int_a^b xf(x)dx=E(X)$$

$$\therefore\ a\le E(X)\le b$$

证(2)

$$2D(X)=2E(X-EX)^2\le 2E(X-c)^2$$

$$\overset{?}{\le} E(X-a)^2+E(X-b)^2\overset{?}{\le}\frac{(b-a)^2}{2}$$

$$\therefore\ D(X)\le\frac{1}{4}(b-a)^2$$

证(2) $D(X)=E(X^2)-(EX)^2$

$$E(X^2)=\int_a^b x^2 f(x)dx$$

则 $$a^2 \le E(X^2) \le b^2$$

$$a^2 \le (EX)^2 \le b^2$$

$$D(X)=E(X^2)-(EX)^2$$

$$\le b^2-a^2 \overset{?}{\le} \frac{(b-a)^2}{4}$$

取 $b=2, a=1 \Rightarrow 3 \le \frac{1}{4}$

正确证明

由于X 在区间 $[a , b]$ 上取值, 故

$$X - c \le b - c \Rightarrow (X - c)^2 \le (b - c)^2$$

$$\Rightarrow E(X - c)^2 \le E(b - c)^2$$

在方差公式 $D(X) \le E(X - c)^2$ 中,

取 $c = \dfrac{a + b}{2}$

$$D(X) \le E(X - c)^2 \le E(b - c)^2$$

$$= (b - c)^2 = \frac{(b - a)^2}{4}$$

4 - 23 设 A, B 为随机试验 E 的两个事件，

$0 < P(A) < 1,\ 0 < P(B) < 1$，令

$$X = \begin{cases} 1, & A\text{发生} \\ 0, & \bar{A}\text{发生} \end{cases} \qquad Y = \begin{cases} 1, & B\text{发生} \\ 0, & \bar{B}\text{发生} \end{cases}$$

证明：若 $\rho_{XY} = 0$，则随机变量 X, Y 相互独立.

证 由 $\rho_{XY} = 0 \longrightarrow COV(X, Y) = 0$

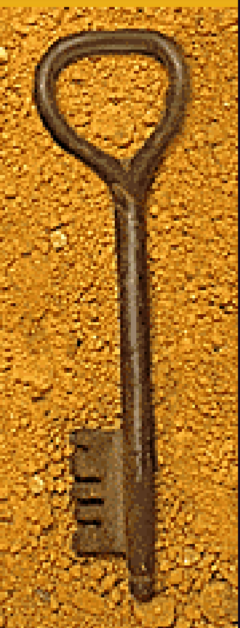
$$\longrightarrow E(XY) = E(X)E(Y)$$

而 $E(X) = P(A) \qquad E(Y) = P(B)$

$$XY = \begin{cases} 1, & A, B\text{同时发生} \\ 0, & A, B\text{不同时发生} \end{cases} \longrightarrow E(XY) = P(AB)$$

$\longrightarrow P(AB) = P(A)P(B) \longrightarrow$ 事件 A, B 相互独立

$\overset{?}{\longrightarrow}$ X, Y 相互独立.



错误原因

$$P(AB) = P(A)P(B) \longrightarrow$$

$$P(X=1, Y=1) = P(X=1)P(Y=1)$$

而这并不表明 X, Y 相互独立.

本题要证明离散随机变量 X, Y 相互独立, 必需证明如下四个等式都成立:

$$P(X=i, Y=j) = P(X=i)P(Y=j) \quad i, j = 0, 1$$

重新证明

由题设得 (X, Y) 的联合分布:

$Y \backslash X$ (p_{ij})	1	0	$p_{\cdot j}$
1	p_1	p_2	$p_1 + p_2$
0	p_3	p_4	$p_3 + p_4$
$p_{i\cdot}$	$p_1 + p_3$	$p_2 + p_4$	$\sum_{i=1}^{4} p_i = 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} E(X) = p_1 + p_3 = P(A) \\ E(Y) = p_1 + p_2 = P(B) \\ E(XY) = p_1 = P(AB) \end{cases}$$

由 $\rho_{XY} = 0 \longrightarrow E(XY) = E(X)E(Y)$

即 $$P(AB) = P(A)P(B)$$

即 $P(X=1, Y=1) = P(X=1)P(Y=1)$

由于事件 A,B 相互独立，必有

$$\overline{A},B;\ A,\overline{B};\ \overline{A},\overline{B}$$

也相互独立，即

$$P(X=1,Y=0)=P(A\overline{B})=P(A)P(\overline{B})$$
$$=P(X=1)P(Y=0)$$

同理可证，

$$P(X=0,Y=1)=P(X=0)P(Y=1)$$
$$P(X=0,Y=0)=P(X=0)P(Y=0)$$

故 X,Y 相互独立.

4－31 X,Y 独立 $\longrightarrow X^2, Y^2$ 独立

$$D(XY)=E[(XY)^2]-[E(XY)]^2$$

$$=E(X^2)E(Y^2)-[E(X)]^2[E(Y)]^2$$

$$=\{D(X)+[E(X)]^2\}\{D(Y)+[E(Y)]^2\}$$

$$-[E(X)]^2[E(Y)]^2$$

$$=D(X)D(Y)+[E(X)]^2D(Y)$$

$$+[E(Y)]^2D(X)$$

$$\geq D(X)D(Y).$$

补充题 设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|},-\infty<x<+\infty$$

(1) $E(|X|), D(|X|)$

(2) 求$\mathrm{cov}(X,|X|)$, 问X 与$|X|$相关与否.

(3) 问X 与$|X|$ 是否独立？为什么？

解 (1) $E(|X|)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\frac{1}{2}e^{-|x|}dx=1$

$$E(|X|^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|^2\frac{1}{2}e^{-|x|}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\frac{1}{2}e^{-x}dx$$

$$=2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}x^2e^{-x}dx=2$$

$D(|X|)=1$

$$(2)\ E(X|X|)=\int_{-\infty}^{+\infty} x|x|\frac{1}{2}e^{-|x|}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0}-x^2e^{x}dx+\frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty}x^2e^{-x}dx=0$$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\frac{1}{2}e^{-|x|}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0}xe^{x}dx+\frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty}xe^{-x}dx=0$$

$$\mathrm{cov}(X,|X|)=E(X|X|)-E(X)E(|X|)=0$$

X 与 $|X|$ 不相关.

(3) $P(X<-2,|X|<1)=0$

$$P(X<-2)=\int_{-\infty}^{-2} f(x)dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{-2} e^{x}dx=\frac{1}{2}e^{-2}$$

$$P(|X|<1)=\int_{-1}^{1} f(x)dx$$

$$=2\cdot\frac{1}{2}\int_{0}^{1} e^{-x}dx=1-e^{-1}$$

显然$P(X<-2,|X|<1)\neq P(X<-2)P(|X|<1)$

因而 X 与$|X|$不独立.