第四章 随机变量的数字特征

分布函数能完整地描述 r.v.的统计特性, 但实际应用中并不都需要知道分布函数，而只需知道 r.v.的某些特征.

例如:

判断棉花质量时, 既看纤维的**平均长度**

又要看 **纤维长度与平均长度的偏离程度**

平均长度越长,偏离程度越小, 质量就越好;

考察一射手的水平, 既要看他的平均环数是否高, 还要看他弹着点的范围是否小, 即数据的波动是否小.

由上面例子看到，与 r.v. 有关的某些数值，虽不能完整地描述 r.v.但能清晰地描述 r.v.在某些方面的重要特征，这些数字特征在理论和实践上都具有重要意义.

随机变量某一方面的概率特性都可用数字来描写

本章内容

- r.v.的平均取值 —— 数学期望
- r.v.取值平均偏离均值的情况 —— 方差
- 描述两 r.v.间的某种关系的数 —— 协方差与相关系数

§4.1随机变量的数学期望

引例 学生甲乙参加数学竞赛, 观察其胜负

	初赛	复赛	决赛	总成绩	算术平均	加权平均 3:3:4	加权平均 2:3:5	加权平均 2:2:6
甲	90	85	53	228	76	73.7	70.0	66.8
乙	88	80	57	225	75	73.2	70.1	67.8
胜者	甲	甲	乙	甲	甲	甲	乙	乙

称

$$\sum_{i=1}^{3} x_i p_i = 90\times 0.2 + 85\times 0.3 + 53\times 0.5$$

$$= 70.0$$

为这 3 个数字的加权平均

数学期望的概念源于此

数学期望的定义

设 X 为离散 r.v. 其分布为

$$P(X = x_k) = p_k, \quad k = 1,2,\cdots$$

若无穷级数 $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k p_k$ 绝对收敛，则称

其和为 X 的数学期望 记作 $E(X)$，即

$$E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k p_k$$

定义 设连续 r.v. X 的 d.f. 为 $f(x)$

若广义积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

绝对收敛, 则称此积分为 X 的**数学期望**

记作 $E(X)$, 即

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

数学期望的本质 —— 加权平均

它是一个数不再是 r. v.

例1 $X \sim B(n, p)$, 求 $E(X)$.

解 $$E(X)=\sum_{k=0}^{n} kC_n^k p^k(1-p)^{n-k}$$

$$=np\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}p^{k-1}(1-p)^{(n-1)-(k-1)}$$

$$=np\sum_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^k p^k(1-p)^{(n-1)-k} = np$$

特例 若 $Y \sim B(1, p)$, 则 $E(Y)=p$

例2 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，求 $E(X)$.

解 $$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$

$$\overset{令\frac{x-\mu}{\sigma}=u}{=} \int_{-\infty}^{+\infty}(u\sigma+\mu)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du=\mu$$

例3 设 $X\sim$ 参数为 p 的几何分布，求$E(X)$.

解 $$E(X)=\sum_{k=1}^{+\infty}kp(1-p)^{k-1}=p\left(\sum_{k=1}^{+\infty}kx^{k-1}\right)\Bigg|_{x=1-p}$$

$$=p\left(\sum_{k=1}^{+\infty}x^k\right)'\Bigg|_{x=1-p}=p\frac{1}{(1-x)^2}\Bigg|_{x=1-p}=\frac{1}{p}$$

常见 r.v. 的数学期望（P159）

分布	概率分布	期望
参数为p的 0-1分布	$P(X=1)=p$ $P(X=0)=1-p$	p
$B(n,p)$	$P(X=k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ $k=0,1,2,\cdots,n$	np
$P(\lambda)$	$P(X=k)=\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ $k=0,1,2,\cdots$	λ

分布	概率密度	期望
区间(a,b)上的均匀分布	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b, \\ 0, & 其它\end{cases}$	$\dfrac{a+b}{2}$
$E(\lambda)$	$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0, \\ 0, & 其它\end{cases}$	$\dfrac{1}{\lambda}$
$N(\mu,\sigma^2)$	$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ

注意 **不是所有的 r.v.都有数学期望**

例如：柯西(Cauchy)分布的密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)},\qquad -\infty<x<+\infty$$

但$\int_{-\infty}^{+\infty}|x|f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|x|}{\pi(1+x^2)}dx$ 发散

它的数学期望不存在!

r.v.函数 $Y=g(X)$ 的数学期望

- 设离散 r.v. X 的概率分布为

$$P(X=x_i)=p_i,\quad i=1,2,\cdots$$

若无穷级数 $\sum_{i=1}^{\infty} g(x_i)p_i$ 绝对收敛，则

$$E(Y)=\sum_{i=1}^{\infty} g(x_i)p_i$$

- 设连续 r.v. 的 d.f. 为 $f(x)$

若广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$ 绝对收敛, 则

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$$

□ 设离散 r.v. (X,Y) 的概率分布为

$$P(X=x_i,Y=y_j)=p_{ij},\quad i,j=1,2,\cdots$$

$Z=g(X,Y)$,

若级数

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} g(x_i,y_j)p_{ij}$$

绝对收敛，则

$$E(Z)=\sum_{i,j=1}^{\infty} g(x_i,y_j)p_{ij}$$

- 设连续 r.v. (X,Y)的联合 d.f. 为

$f(x,y)$，$Z = g(X,Y)$,

若广义积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)f(x,y)\,dxdy$$

绝对收敛，则

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)f(x,y)\,dxdy$$

例3 设 $(X,Y)\sim N(0,1;0,1;0)$，求 $Z=\sqrt{X^2+Y^2}$ 的数学期望.

解 $$E(Z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{x^2+y^2}\,f(x,y)dxdy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{x^2+y^2}\,\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{+\infty}r\,\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{r^2}{2}}rdr\right)d\theta$$

$$=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

例4 五个独立元件,寿命分别为 $X_1, X_2, \cdots, X_5$,都服从参数为 λ 的指数分布，若将它们

(1) 串联; (2) 并联

成整机，求整机寿命的均值.（P.142 例6）

解 (1) 设整机寿命为 N， $N = \min\limits_{k=1,2,\cdots,5}\{X_k\}$

$$F_N(x) = 1 - \prod_{k=1}^{5}(1 - F_k(x)),$$

$$= \begin{cases} 1 - e^{-5\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$$

$$f_N(x)=\begin{cases}5\lambda e^{-5\lambda x}, & x>0,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

即 $N \sim E(5\lambda)$, $E(N)=\dfrac{1}{5\lambda}$

(2) 设整机寿命为 $M=\max\limits_{k=1,2,\cdots,5}\{X_k\}$

$$F_M(x)=\prod_{k=1}^{5}F_k(x)=\begin{cases}(1-e^{-\lambda x})^5, & x>0,\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$f_M(x)=\begin{cases}5\lambda e^{-\lambda x}(1-e^{-\lambda x})^4, & x>0,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

$$E(M)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f_M(x)dx$$

$$=\int_{0}^{+\infty} 5\lambda x e^{-\lambda x}(1-e^{-\lambda x})^4 dx$$

$$=\frac{137}{60\lambda}$$

$$\frac{E(M)}{E(N)}=\frac{137/60\lambda}{1/5\lambda}>11$$

可见, 并联组成整机的平均寿命比串联组成整机的平均寿命长11倍之多.

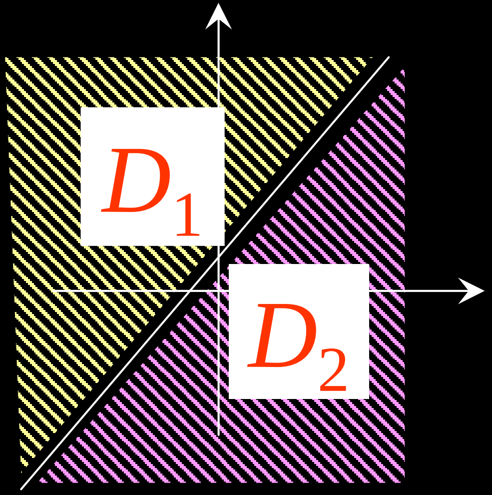
例5 设 $X \sim N(0,1)$, $Y \sim N(0,1)$, X, Y 相互独立，求 $E(\max(X,Y))$.

解 $f(x,y) = f_X(x) f_Y(y) = \dfrac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$

$$E(\max\{X,Y\}) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \max\{x,y\} f(x,y)dxdy$$

$$= \iint_{D_1} \max\{x,y\} f(x,y)dxdy$$

$$+ \iint_{D_2} \max\{x,y\} f(x,y)dxdy$$



$$= \iint_{D_1} y \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dxdy + \iint_{D_2} x \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dxdy$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \int_{x}^{+\infty} y e^{-\frac{y^2}{2}} dy + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \int_{y}^{+\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \int_{x}^{+\infty} y e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

其中 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ 称为 **概率积分**

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx\right)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dxdy$$

$$= 4 \int_{0}^{+\infty} \int_{0}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dxdy$$

$$=4\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}e^{-(x^2+y^2)}dxdy=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{+\infty}e^{-r^2}rdr$$

$$=4\times\frac{\pi}{2}\times\frac{1}{2}=\pi$$

所以 $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$

一般地，若$X\sim N(\mu,\sigma^2),Y\sim N(\mu,\sigma^2)$,

X,Y相互独立，则

$$E(\max\{X,Y\})=\mu+\frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}$$

$$E(\min\{X,Y\})=\mu-\frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}$$

数学期望的性质

- $E(C) = C$ —— 常数
- $E(aX) = aE(X)$
- $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + C\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i E(X_i) + C$$

- 当 X, Y 独立时，$E(XY) = E(X)E(Y)$.
- 若存在数 a 使 $P(X \geq a) = 1$, 则 $E(X) \geq a$;
  若存在数 b 使 $P(X \leq b) = 1$, 则 $E(X) \leq b$.

注　性质 4 的逆命题不成立，即

若$E(XY)=E(X)E(Y)$，X,Y不一定独立

反例见附录 1

证 性质5

设 X 连续，d.f. 为 $f(x)$, 分布函数为 $F(x)$, 则

$$P(X \ge a) = 1 - P(X < a)$$

$$\longrightarrow \quad 1 - F(a) = 1 \quad \longrightarrow \quad F(a) = 0$$

$$\longrightarrow \quad F(x) = 0, \qquad x \le a$$

$$\longrightarrow \quad f(x) = 0, \qquad x \le a$$

故 $$E(X) = \int_a^{+\infty} x f(x) dx \ge \int_a^{+\infty} a f(x) dx = a$$

例6 将 4 个不同色的球随机放入 4 个盒子中，每盒容纳球数无限，求空盒子数的数学期望.

解一 设 X 为空盒子数，则 X 的概率分布为

X	0	1	2	3
P	$\dfrac{4!}{4^4}$	$\dfrac{C_4^1 C_3^1 P_4^2}{4^4}$	$\dfrac{C_4^2 (C_4^2 + C_2^1 C_4^3)}{4^4}$	$\dfrac{C_4^1}{4^4}$

$$E(X) = \frac{81}{64}$$

解二 再引入 $X_i, i = 1,2,3,4$

$$X_i = \begin{cases} 1, & 第i盒空, \\ 0, & 其它, \end{cases}$$

$$X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$$

X_i	1	0
P	$\left(\frac{3}{4}\right)^4$	$1-\left(\frac{3}{4}\right)^4$

$$E(X_i) = \left(\frac{3}{4}\right)^4$$

$$E(X) = 4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{81}{64}$$

例7 设二维 r.v. (X,Y) 的 d.f. 为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}x(1+3y^2), & 0<x<2, 0<y<1,\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

求 $E(X), E(Y), E(X+Y), E(XY), E(Y/X)$

解 $$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)dxdy$$

$$=\int_0^2 x\cdot\frac{1}{4}xdx\int_0^1(1+3y^2)dy=\frac{4}{3}$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)dxdy$$

$$=\int_0^2\frac{1}{4}xdx\int_0^1 y(1+3y^2)dy=\frac{5}{8}$$

由数学期望性质

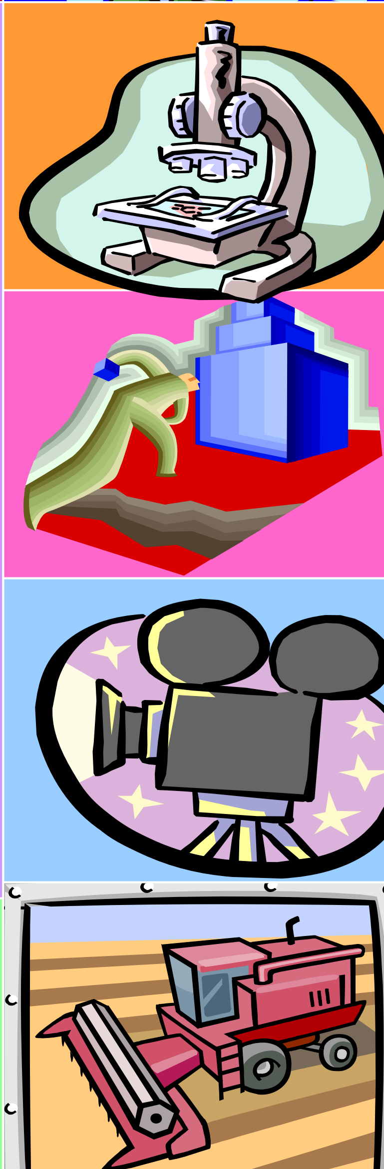
$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)=\frac{4}{3}+\frac{5}{8}=\frac{47}{24}$$

$$E(XY)\overset{\boxed{X,Y\text{ 独立}}}{=}E(X)\cdot E(Y)=\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{8}=\frac{5}{6}$$

$$E\left(\frac{Y}{X}\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{y}{x}\right)f(x,y)dxdy$$

$$=\int_0^2\frac{1}{2}dx\int_0^1 y\cdot\frac{1}{2}(1+3y^2)dy=\frac{5}{8}\neq\frac{15}{32}=\frac{E(Y)}{E(X)}$$

数学期望的应用



应用1 据统计65岁的人在10年内正常死亡的概率为0. 98, 因事故死亡概率为0.02.保险公司开办老人事故死亡保险, 参加者需交纳保险费100元.若10 年内因事故死亡公司赔偿 a 元, 应如何定 a, 才能使公司可期望获益; 若有1000人投保, 公司期望总获益多少?

解 设X_i表示公司从第 i 个投保者身上所得的收益, i =1~1000 . 则

$$X_i \sim \begin{pmatrix} 100 & 100-a \\ 0.98 & 0.02 \end{pmatrix}$$

由题设 $E(X_i)=100\times0.98+(100-a)\times0.02$

$$=100-0.02a>0$$

$100<a<5000$

公司每笔赔偿小于5000元, 能使公司获益.

公司期望总收益为

$$E(\sum_{i=1}^{1000}X_i)=\sum_{i=1}^{1000}E(X_i)=100000-20a.$$

若公司每笔赔偿3000元, 能使公司期望总获益40000元.

应用2　验血方案的选择

为普查某种疾病, n 个人需验血. 验血方案有如下两种:

(1) 分别化验每个人的血, 共需化验 n 次;

(2) 分组化验, k 个人的血混在一起化验, 若结果为阴性, 则只需化验一次; 若为阳性, 则对 k 个人的血逐个化验, 找出有病者, 此时 k 个人的血需化验 $k+1$ 次.

设每人血液化验呈阳性的概率为 p, 且每人化验结果是相互独立的. 试说明选择哪一方案较经济.

解 只须计算方案(2)所需化验次数的期望. 为简单计，不妨设 n 是 k 的倍数，共分成 n/k 组. 设第 i 组需化验的次数为X_i, 则

X_i	1	$k+1$
P	$(1-p)^k$	$1-(1-p)^k$

$$E(X_i)=(1-p)^k+(k+1)[1-(1-p)^k]$$

$$=(k+1)-k(1-p)^k$$

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n/k}E(X_i)=\frac{n}{k}\left[(k+1)-k(1-p)^k\right]$$

$$=n\left[1-\left((1-p)^k-\frac{1}{k}\right)\right]$$

若 $\left((1-p)^k-\dfrac{1}{k}\right)>0$, 则 $E(X)<n$

例如, $n=1000,\ p=0.001,\ k=10,$

$$E(X)=1000\left[1-\left(0.999^{10}-\frac{1}{10}\right)\right]\approx 110<<1000.$$

当 $(1-p)^k<1/k$ 时, 选择方案(2) 较经济.

应用3 市场上对某种产品每年需求量为 X 吨，$X \sim U[2000,4000]$, 每出售一吨可赚3万元 ,售不出去，则每吨需仓库保管费1万元，问应该生产这中商品多少吨, 才能使平均利润最大?

解

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2000}, & 2000<x<4000,\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

设每年生产 y 吨的利润为 Y

显然，$2000 < y < 4000$

$$Y = g(X) = \begin{cases} 3y, & y \le X, \\ 3X - (y - X)\cdot 1, & y > X \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 3y, & y \le x, \\ 4x - y, & y > x \end{cases}$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) dx$$

$$= \int_{2000}^{y} (4x - y) \frac{1}{2000} dx + \int_{y}^{4000} 3y \frac{1}{2000} dx$$

$$= \frac{1}{2000}(-2y^2 + 14000y - 8 \times 10^6)$$

$$\frac{dE(Y)}{dy} = \frac{1}{2000}(-4y + 14000) \overset{令}{=} 0$$

显然，$\dfrac{d^2E(Y)}{dy^2} = -\dfrac{4}{2000} < 0$

故 y=3500 时, $E(Y)$最大, $E(Y)$= 8250万元

应用4 设由自动线加工的某种零件的内径 X (mm)~ $N(\mu, 1)$. 已知销售每个零件的利润 T (元)与销售零件的内径 X 有如下的关系:

$$T = \begin{cases} -1, & X < 10 \\ 20, & 10 \le X \le 12 \\ -5, & X > 12 \end{cases}$$

问平均直径 μ 为何值时, 销售一个零件的平均利润最大? (P.171习题四15题)

解 $P(T=-1)=P(X<10)=\Phi(10-\mu)$

$P(T=20)=P(10\le X\le 12)$

$=\Phi(12-\mu)-\Phi(10-\mu)$

$P(T=-5)=P(X>12)=1-\Phi(12-\mu)$

$$E(T)=(-1)\Phi(10-\mu)$$
$$+20(\Phi(12-\mu)-\Phi(10-\mu))$$
$$+(-5)(1-\Phi(12-\mu))$$
$$=25\Phi(12-\mu)-21\Phi(10-\mu)-5$$

$$\frac{dE(T)}{d\mu} = 21\Phi'(10-\mu) - 25\Phi'(12-\mu) \overset{令}{=} 0$$

即 $$21\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(10-\mu)^2}{2}} - 25\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(12-\mu)^2}{2}} = 0$$

$$\longrightarrow \quad e^{22-2\mu} = \frac{25}{21} \quad \longrightarrow \quad \mu = 11 - \frac{1}{2}\ln\frac{25}{21}$$

可以验证，$\dfrac{d^2E(T)}{d\mu^2} < 0$,

故 $\mu = 11 - \frac{1}{2}\ln\frac{25}{21} = 10.91(mm)$ 时，销售一个零件的平均利润最大.

作业 P.169 习题四

1 2 3

4 5 7

补 充 作 业

设 $g(x)$ 是取正值的非减函数, X 为连续型 r.v., 且 $E(\ g(X)\ )$存在,

证明: 对任意常数 a

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(g(X))}{g(a)}$$

柯西

Augustin-Louis

Cauchy

法国数学家

1789 - 1857

柯 西 简介

法国数学家 27岁当选法国科学院院士

早在1811年就解决了拉格朗日向他提出的一个问题：凸多面体的角是否被它的面所决定？柯西作了肯定的回答.这一直是几何学中一个精彩的结果.

在概率论中他给出了有名的柯西分布. 然而他一生中最重要的数学贡献在另外三个领域：微积分学、复变函数和微分方程.

在这三个领域中我们常常能见到以柯西名字命名的定理、公式和方程等:

柯西判别法则; 柯西-黎曼方程;

柯西积分定理; 柯西积分公式;

柯西不等式; 柯西初值问题 ……

柯西在代数学、几何学、误差理论以及天体力学、光学、弹性力学诸方面都有出色的工作, 特别是他弄清了弹性理论的基本数学结构, 为弹性力学奠定了严格的理论基础.

柯西是一位多产的数学家，一生共发表论文 800 余篇，著书7本.《柯西全集》共有27卷，其中最重要的为：

《分析教程》 1821 年

《无穷小分析教程概论》 1823 年

《微积分在几何上的应用》 1826 年

柯西的著作大多是急就章，但都朴实无华，有思想，有创见. 他所发现和创立的定理和公式，往往是一些最简单、最基本的事实. 因而，他的数学成就影响广泛，意义深远.

若 X 服从柯西(Cauchy)分布，
其 p.d.f. 为

$$f(x;\theta)=\frac{1}{\pi[1+(x-\theta)^2]} \qquad -\infty<x<\infty$$

简记 $X\sim \mathrm{C}(\theta)$分布，

[附录1] 性质 4 的逆命题不成立，即

若$E(XY)=E(X)E(Y)$，X,Y不一定独立

反例 1

$Y \backslash X$ (p_{ij})	-1	0	1	$p_{\cdot j}$
-1	$1/8$	$1/8$	$1/8$	$3/8$
0	$1/8$	0	$1/8$	$2/8$
1	$1/8$	$1/8$	$1/8$	$3/8$
$p_{i\cdot}$	$3/8$	$2/8$	$3/8$	

XY	-1	0	1
P	$2/8$	$4/8$	$2/8$

$$E(X)=E(Y)=0; \qquad E(XY)=0;$$

$$E(XY)=E(X)E(Y)$$

但 $$P(X=-1,Y=-1)=\frac{1}{8}$$

$$\neq P(X=-1)P(Y=-1)=\left(\frac{3}{8}\right)^2$$

反例2 $(X,Y)\sim U(D),\quad D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\}$

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}, & x^2+y^2\le 1,\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi}, & -1<x<1,\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi}, & -1<y<1,\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$$

但 $$E(X)=\int_{-1}^{1} x\frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi}=0;$$

$$E(XY)=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} xy\frac{1}{\pi}dxdy=0;$$

$$E(XY)=E(X)E(Y)=0$$

[附录2]

几个重要的 r.v. 函数的数学期望

$E(X^k)$ —— X 的 k 阶原点矩

$E(|X|^k)$ —— X 的 k 阶绝对原点矩

$E((X-E(X))^k)$ —— X 的 k 阶中心矩

$E((X-E(X))^2)=D(X)$ —— X 的 方差

$E(X^kY^l)$ —— X,Y 的 $k+l$ 阶混合原点矩

$E\left((X-E(X))^k(Y-E(Y))^l\right)$

—— X,Y 的 $k+l$ 阶混合中心矩

$E(XY)$ —— X,Y 的 二阶原点矩

$E\left((X-E(X))(Y-E(Y))\right)$

—— X,Y 的二阶混合中心矩

X,Y 的协方差

$$E\left(\frac{(X-E(X))(Y-E(Y))}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}\right)=\rho_{XY}$$

—— X,Y 的相关系数