第七章习题课

问题 1 极大似然估计具有不变性，矩估计是否也具有？

答 否.

例如 X 服从反射正态分布,其p.d.f.为

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{1}{\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

现用矩法分别对 σ 和 σ^2 作估计

$$E(X)=\sqrt{2/\pi}\,\sigma,\ E(X^2)=\sigma^2,\ D(X)=(1-2/\pi)\sigma^2$$

设（ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ）为总体的样本

由矩法，令 $E(X)=\sqrt{2/\pi}\,\sigma=\overline{X}$

$$E(X^2)=D(X)+E^2(X)=\sigma^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$$

分别得矩估计量为
$$\begin{cases}\hat{\sigma}=\sqrt{\pi/2}\,\overline{X}\\ \hat{\sigma^2}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\end{cases}\Rightarrow\ \hat{\sigma^2}\neq(\hat{\sigma})^2$$

所以矩估计不具有不变性

问题2 似然方程的解都是极大似然估计吗？

答 不尽然.

例如 X 服从柯西(Cauchy)分布,其p.d.f.为

$$f(x;\theta)=\frac{1}{\pi[1+(x-\theta)^2]} \qquad -\infty<x<\infty$$

当 $n=1$ 时，似然函数为

$$L(\theta)=\frac{1}{\pi[1+(x_1-\theta)^2]}$$

$$\ln L(\theta) = -\ln \pi - \ln[1 + (x_1 - \theta)^2]$$

此时，对数似然方程为

$$\frac{d \ln L}{d\theta} = \frac{2(x_1 - \theta)}{1 + (x_1 - \theta)^2} = 0$$

故 $\hat{\theta} = X_1$ 是 θ 极大似然估计.

当 $n = 2$ 时，似然函数为

$$L(\theta) = \frac{1}{\pi^2[1 + (x_1 - \theta)^2][1 + (x_2 - \theta)^2]} \qquad (1)$$

要使 $L(\theta)$ 达到最大，只要(1)的分母最小

令 $f(\theta)=[1+(x_1-\theta)^2][1+(x_2-\theta)^2]$

由 $f'(\theta)=-2(x_1+x_2-2\theta)\cdot$

$$\cdot[\theta^2-(x_1+x_2)\theta+x_1x_2+1]=0 \qquad (2)$$

解得三个解: $\theta_1=(X_1+X_2)/2$

$$\theta_{2,3}=[(X_1+X_2)\pm\sqrt{(X_1-X_2)^2-4}]/2$$

通过 $f''(\theta)$ 的正负可判得:

当 θ_1 为 θ 的极大似然估计时，$\theta_{2,3}$ 不是 θ 的极大似然估计; 反之，当 $\theta_{2,3}$ 为 θ 的极大似然估计时, θ_1 不是 θ 的极大似然估计.

而无论发生何种情况，似然方程 (2) 的三个解不全是 θ 的极大似然估计.

7-16

解一 $X \sim B(n,\theta)$

令 $\bar{X} = E(X) = n\theta$

$$\Rightarrow \hat{\theta} = \bar{X}/n \overset{?}{\Rightarrow} \widehat{\theta}^{2} = \bar{X}^{2}/n^{2}$$

$$E(\widehat{\theta}^{2}) = E(\bar{X}^{2}/n^{2}) = E(\bar{X}^{2})/n^{2}$$

$$= [D(\bar{X}) + E^{2}(\bar{X})]/n^{2}$$

$$= [n\theta(1-\theta)/n + (n\theta)^{2}]/n^{2} \neq \theta^{2}.$$

$\therefore$ θ^{2} 的无偏估计量为 $\bar{X}^{2}/n^{2}$.

解二 $X \sim B(n,\theta)$ 令 $E(X_i) = n\theta = \overline{X}$

$$E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i^2)$$

样本容量为何与分布的参数n相同？

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[D(X_i) + E^2(X_i)] = n\theta(1-\theta) + (n\theta)^2$$

$$= \overline{X} + n(n-1)\theta^2$$

$$\therefore \ \hat{\theta}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i^2 - X_i)}{n^2(n-1)}$$ 为 θ^2 的无偏估计.

正确解 $X \sim B(n,\theta)$ 令 $E(X_i) = n\theta = \overline{X}$,

$$E\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i^2\right) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} E(X_i^2)$$

$$= \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}[D(X_i) + E^2(X_i)] = n\theta(1-\theta) + (n\theta)^2$$

$$= \overline{X} + n(n-1)\theta^2$$

$$\therefore \ \hat{\theta}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{m}(X_i^2 - X_i)}{mn(n-1)}$$ 为 θ^2 的无偏估计.

7-18

$$\because \lim_{n\to\infty} P\left\{\left| S^2-\sigma^2 \right| \geq \varepsilon\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty} P\left\{\left| \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\bar{\xi})^2-\sigma^2 \right| \geq \varepsilon\right\}=0$$

$\therefore S^2$是σ^2的一致估计.

死套定义
等于没证！

证明预备工作

$$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1),\ D(\chi^2)=2(n-1)$$

$$D(S^2)=D\left(\frac{\sigma^2}{n-1}\cdot\chi^2\right)=\frac{\sigma^4 2(n-1)}{(n-1)^2}=\frac{2\sigma^4}{n-1}.$$

证一 $E(S^2)=\sigma^2$ 由切贝雪夫不等式

$$0 \le P(|S^2-\sigma^2| \ge \varepsilon)$$

$$=P(|S^2-E(S^2)| \ge \varepsilon)$$

$$\le \frac{D(S^2)}{\varepsilon^2}=\frac{2\sigma^4}{\varepsilon^2(n-1)} \to 0 \, (n \to \infty)$$

由极限的夹逼定理

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{|S^2-\sigma^2| \ge \varepsilon\right\}=0$$

$\therefore$ S^2是 σ^2的一致估计.

证二

$E(S^2)=\sigma^2$ $\therefore$ S^2是 σ^2的无偏估计.

$$\lim_{n\to\infty} D(S^2)=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sigma^4}{n-1}=0,$$

由教材 P .219 例14 结论得证.

7-20 证　$E(\overline{X})=\mu$, $\overline{X}$ 是 μ 的无偏估计.

$$f(x,\mu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\ln f=-\ln\sqrt{2\pi}-\ln\sigma-(x-\mu)^2/2\sigma^2$$

$$E\left(\frac{\partial\ln f}{\partial\mu}\right)^2=E\left[\frac{(X-\mu)^2}{\sigma^4}\right]=\frac{1}{\sigma^2}$$

$$D(\mu_0)=1/\left[nE\left(\frac{\partial\ln f}{\partial\mu}\right)^2\right]=\sigma^2/n=D(\overline{X})$$

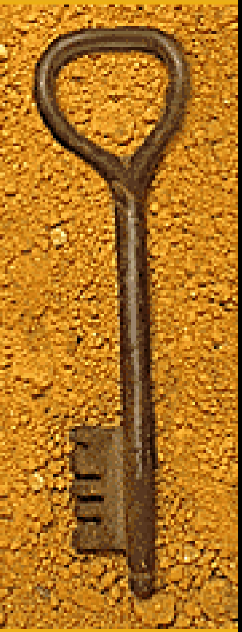
$\therefore$ $\overline{X}$ 是 μ 的有效估计量.

补充题 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为 $\boldsymbol{X}$ 的一个样本,常数 $\boldsymbol{k}$ 取何值可使 $k\sum_{i=1}^{n}|X_i - \bar{X}|$ 为 σ 的无偏估计量

解1 $E(k\sum_{i=1}^{n}|X_i - \bar{X}|) = kE(\sum_{i=1}^{n}|X_i - \bar{X}|)$

$$\overset{?}{=} kE(\sum_{i=1}^{n}|X_i - \bar{X}|^2)^{1/2}$$

$$= k[E(\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - n\bar{X}^2)]^{1/2}$$



$$= k[\sum_{i=1}^{n} E(X_i^2) - \underline{nE(\bar{X}^2)}]^{1/2}$$

$$?= k\{n[D(X_i) + E(X_i)^2]$$

$$\underline{-[D(\sum_{i=1}^{n} X_i) + E(\sum_{i=1}^{n} X_i^2)]}\}^{1/2}$$

$$?= k[n(\sigma^2 + \mu^2) - \sigma^2 - n\mu^2]^{1/2}$$

$$= k[(n-1)\sigma^2]^{1/2} = k\sqrt{n-1}\sigma = \sigma$$

$$\Rightarrow k = 1/\sqrt{n-1}$$

解2 总体方差的无偏估计量为

$$\sigma^2 \overset{?}{=} \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}|X_i-\overline{X}|^2$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n}|X_i-\overline{X}|^2=(n-1)\sigma^2$$

$$E\sum_{i=1}^{n}|X_i-\overline{X}|^2=E[(n-1)\sigma^2]=(n-1)\sigma^2$$

$$\Big\downarrow ?$$

$$E(k\sum_{i=1}^{n}|X_i-\overline{X}|) = k\sqrt{(n-1)}\,\sigma=\sigma$$

$$\Rightarrow k=1/\sqrt{n-1}$$

解3　总体方差的无偏估计量为

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

?

$$\Rightarrow \sigma = \frac{1}{\sqrt{n-1}}\sum_{i=1}^{n}|X_i - \overline{X}|$$

$$\Rightarrow k = \frac{1}{\sqrt{n-1}}$$

解4　据题意　$E(k\sum_{i=1}^{n}|X_i-\bar{X}|)=\sigma$

$$\Rightarrow\ k^2[E(\sum_{i=1}^{n}|X_i-\bar{X}|)]^2=\sigma^2$$

又σ^2的无偏估计量为

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}|X_i-\bar{X}|^2$$

$$\Rightarrow\ k^2[E(\sum_{i=1}^{n}|X_i-\bar{X}|)]^2\overset{?}{=}\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left|X_i-\bar{X}\right|^2$$

$$\overset{?}{\Rightarrow}\ k^2=\frac{1}{n-1}\ \Rightarrow k=1/\sqrt{n-1}$$

解5 $E(X_i-\overline{X})=0,\ D(X_i-\overline{X})\overset{?}{=}\sigma^2+\sigma^2/n$

$$X_i-\overline{X}\sim N(0,\sigma^2+\sigma^2/n)$$

$$E(|X_i-\overline{X}|)=\int_{-\infty}^{+\infty}|z|\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{n+1}{n}}\sigma}e^{-\frac{z^2}{2\frac{n+1}{n}\sigma^2}}dz$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{n+1}{n}}\sigma$$

故 $E\left(k\sum_{i=1}^{n}|X_i-\bar{X}|\right)=k\left(\sum_{i=1}^{n}E|X_i-\bar{X}|\right)$

$$=kn\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{n+1}{n}}\sigma\overset{令}{=}\sigma$$

$$k=\sqrt{\frac{\pi}{2n(n+1)}}$$

解 $$X_i-\overline{X}=\frac{1}{n}\left(-X_1-X_2\cdots+(n-1)X_i-\cdots-X_n\right)$$

$$E(X_i-\overline{X})=0,\quad D(X_i-\overline{X})=\frac{n-1}{n}\sigma^2$$

$$X_i-\overline{X}\sim N(0,\sigma^2-\sigma^2/n)$$

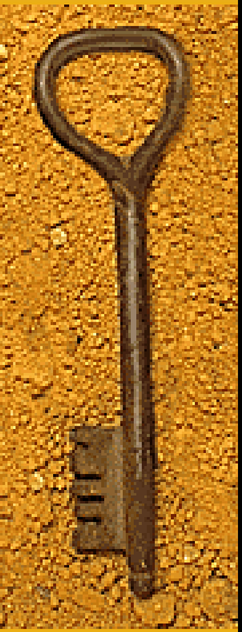
$$E(|X_i-\overline{X}|)=\int_{-\infty}^{+\infty}|z|\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{n-1}{n}}\sigma}e^{-\frac{z^2}{2\frac{n-1}{n}\sigma^2}}dz$$

$$=2\int_0^{+\infty} z\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{n-1}{n}}\sigma}e^{-\frac{z^2}{2\frac{n-1}{n}\sigma^2}}dz=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{n-1}{n}}\sigma$$

故 $E\left(k\sum_{i=1}^{n}|X_i-\bar{X}|\right)=k\left(\sum_{i=1}^{n}E|X_i-\bar{X}|\right)$

$$=kn\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{n-1}{n}}\sigma\overset{令}{=}\sigma$$

$$k=\sqrt{\frac{\pi}{2n(n-1)}}$$



解二 令 $Z = X_i - \overline{X}$

$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\overline{X} \sim N(\mu, \sigma^2 / n)$

$E(Z) = \mu - \mu = 0,$

$$D(Z) = D(X_i) + D(\overline{X}) - 2Cov(X_i, \overline{X})$$

$$= \sigma^2 + \sigma^2 / n - (2/n)Cov(X_i, \sum_{i=1}^{n} X_i)$$

$$= \sigma^2 + \sigma^2 / n - (2/n)\sigma^2 = \sigma^2 - \sigma^2 / n.$$

$Z \sim N(0, \sigma^2 - \sigma^2 / n)$ 以下同解法一.