第七章

参数估计

统计推断DE基本问题

- 参数估计问题
  - 点估计
  - 区间估计
- 假设检验问题

什么是参数估计?

参数是刻画总体某方面概率特性的数量.

当此数量未知时, 从总体抽出一个样本, 用某种方法对这个未知参数进行估计就是参数估计.

例如，$X \sim N(\mu, \sigma^2)$,

若μ, σ^2未知, 通过构造样本的函数, 给出它们的估计值或取值范围就是参数估计的内容.

点估计

区间估计

参数估计的类型

点估计 —— 估计未知参数的值

区间估计——

估计未知参数的取值范围，
并使此范围包含未知参数
真值的概率为给定的值.

§ 7.1 点估计方法

点估计的思想方法

设总体X 的分布函数的形式已知, 但含有一个或多个未知参数: $\theta_1,\theta_2, \ldots,\theta_k$

设 $X_1, X_2,\ldots, X_n$为总体的一个样本

构造 k 个统计量:

$$\left.\begin{array}{l}\theta_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)\\ \theta_2(X_1,X_2,\cdots,X_n)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \theta_k(X_1,X_2,\cdots,X_n)\end{array}\right\}\boxed{\text{随机变量}}$$

并建立k个方程。

当测得样本值$(x_1, x_2,\ldots, x_n)$时,代入上述方程组，即可得到 k 个数:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{\theta}_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)\\ \hat{\theta}_2(x_1,x_2,\cdots,x_n)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \hat{\theta}_k(x_1,x_2,\cdots,x_n)\end{array}\right\}\ \boxed{\text{数 值}}$$

称数 $\hat{\theta}_1\cdots,\hat{\theta}_k$ 为未知参数 $\theta_1,\cdots,\theta_k$ 的估计值

对应统计量 为未知参数 $\theta_1,\cdots,\theta_k$ 的估计量

三种常用的点估计方法

□ 频率替换法

利用事件A在n次试验中发生的频率

n_A/n 作为事件A发生的概率p的估计量

$$\frac{n_A}{n} \xrightarrow{P} p$$

例1 设总体$X \sim N(\mu, 2)$, 在对其作28次独立观察中, 事件“$X<4$”出现了21次, 试用频率替换法求参数μ的估计值.

解 由 $P(X<4)=\Phi(\frac{4-\mu}{\sqrt{2}})\approx\frac{21}{28}=0.75$

查表得 $\frac{4-\mu}{\sqrt{2}}=0.675$

于是μ的估计值为 $\hat{\mu}\approx 3.045$

□ 矩法

方法

用样本 k 阶矩作为总体 k 阶矩的估计量, 建立含有待估参数的方程, 从而解出待估参数

一般, 不论总体服从什么分布, 总体期望 μ 与方差 σ^2 存在, 则它们的矩估计量分别为

$$\hat{\mu}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\bar{X} \qquad \hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2=S_n^2$$

事实上，按矩法原理，令

$$\begin{cases} \bar{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \mu \\ A_2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = E(X^2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{\mu} = \bar{X} \\ \hat{\sigma}^2 = \hat{E}(X^2) - \hat{E}^2(X) = A_2 - \hat{\mu}^2 \end{cases}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \bar{X}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = S_n^2$$

设待估计的参数为 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k$

设总体的 r 阶矩存在，记为

$$E(X^r)=\mu_r(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)$$

样本 $X_1, X_2,\ldots, X_n$ 的 r 阶矩为 $B_r=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^r$

令

$$\mu_r(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^r \qquad r=1,2,\cdots,k$$

—— 含未知参数 $\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_k$ 的方程组

解方程组，得 k 个统计量:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{\theta}_1(X_1, X_2, \cdots, X_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \hat{\theta}_k(X_1, X_2, \cdots, X_n)\end{array}\right\}$$

未知参数 $\theta_1, \ldots, \theta_k$ 的**矩估计量**

代入一组样本值得 k 个数:

$$\left.\begin{array}{l}\overset{\frown}{\theta}_1 = \hat{\theta}_1(x_1, x_2, \cdots; x_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \overset{\frown}{\theta}_k = \hat{\theta}_k(x_1, x_2, \cdots; x_n)\end{array}\right\}$$

未知参数 $\theta_1, \ldots, \theta_k$ 的**矩估计值**

例2 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 为总体的样本，求 μ, σ^2 的矩法估计量.

解 $\hat{\mu}_{矩} = \overline{X}$

$$\hat{\sigma}^2_{矩} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \overline{X}^2$$

例3 设总体 $X \sim E(\lambda)$, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 为总体的样本, 求 λ 的矩法估计量.

解 $E(X) = 1/\lambda$, 令 $\overline{X} = 1/\lambda$.

故 $\hat{\lambda}_{矩} = 1/\overline{X}$.

例4 设从某灯泡厂某天生产的灯泡中随机抽取10只灯泡，测得其寿命为(单位:小时)

1050, 1100, 1080, 1120, 1200

1250, 1040, 1130, 1300, 1200

试用矩法估计该厂这天生产的灯泡的平均寿命及寿命分布的方差.

解

$$\hat{E}(X) = \bar{x} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i = 1147(h)$$

$$\hat{D}(X) = \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i^2 - \bar{x}^2 = 6821(h^2).$$

例5 设总体 $X \sim U(a, b)$, a, b 未知, 求参数 a, b 的矩法估计量.

解 由于 $E(X)=\dfrac{a+b}{2}$, $D(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$

$$E(X^2)=D(X)+E^2(X)=\frac{(b-a)^2}{12}+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

令
$$\begin{cases} \dfrac{a+b}{2}=\bar{X} \\ \dfrac{(b-a)^2}{12}+\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2=A_2=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2 \end{cases}$$

解得

$$\hat{a}_{矩} = \bar{X} - \sqrt{3(A_2 - \bar{X}^2)}$$

$$= \bar{X} - \sqrt{\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2},$$

$$\hat{b}_{矩} = \bar{X} + \sqrt{3(A_2 - \bar{X}^2)}$$

$$= \bar{X} + \sqrt{\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}.$$

❑ 极大似然估计法

思想方法：一次试验就出现的事件有较大的概率

例如: 有两外形相同的箱子,各装100个球

一箱　99个白球　　1 个红球

一箱　1 个白球　　99个红球

现从两箱中任取一箱, 并从箱中任取一球, 结果所取得的球是白球.

问：所取的球来自哪一箱？　答：第一箱.

例6 设总体 X 服从0-1分布,且$P\,(X = 1) = p$,
用极大似然法求 p 的估计值.

解 总体 X 的概率分布为

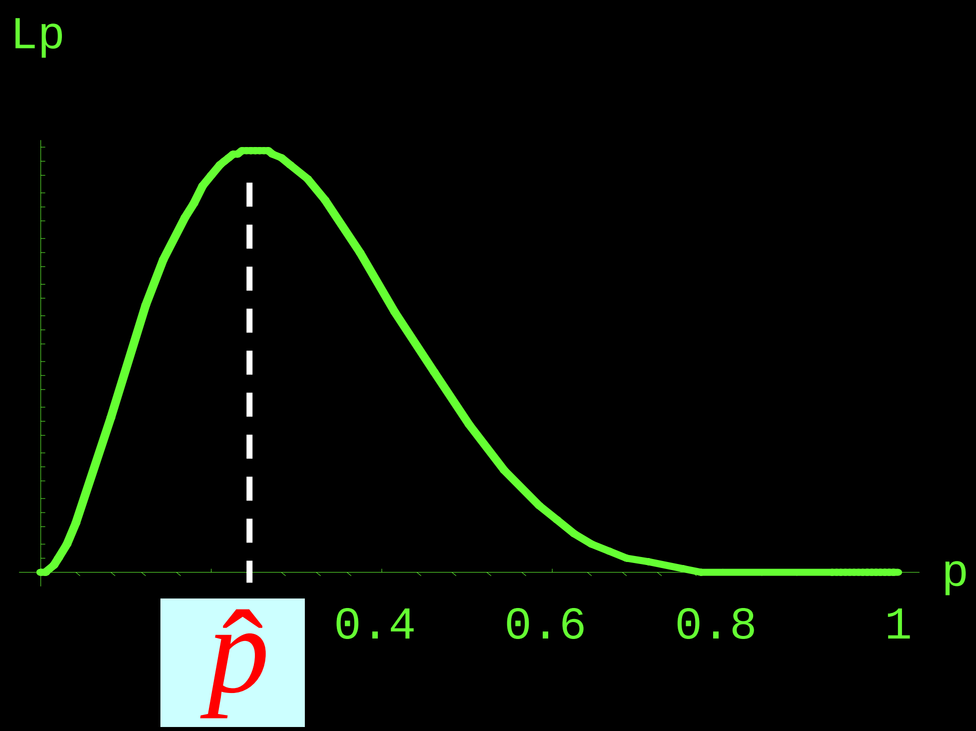
$$P(X = x) = p^{x}(1-p)^{1-x}, \quad x = 0,1$$

设 $x_1, x_2, \ldots, x_n$为总体样本$X_1, X_2, \ldots, X_n$
的样本值,

则 $P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \cdots, X_n = x_n)$

$$= p^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i} = L(p) \quad x_i = 0,1, i = 1,2,\cdots,n$$

对于不同的 p , $L(p)$不同, 见右下图



现经过一次试验,事件

$$(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \cdots, X_n = x_n)$$

发生了， 则 p 的取值应使这个事件发生的概率最大.

在容许范围内选择 p，使$L(p)$最大

注意到，$\ln L(p)$是 L 的单调增函数,故若某个p 使$\ln L(p)$最大, 则这个p 必使$L(p)$最大。

$$\frac{\mathrm{d}\ln L}{\mathrm{d}p}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{p}-\frac{n-\sum_{i=1}^{n}x_i}{1-p}\overset{令}{=}0 \quad \Rightarrow \hat{p}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\bar{x}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2\ln L}{\mathrm{d}p^2}=-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{p^2}-\frac{n-\sum_{i=1}^{n}x_i}{(1-p)^2}<0\right)$$

所以 $\hat{p}=\bar{x}$ 为所求 p 的估计值.

一般, 设 X 为离散型随机变量, 其分布律为

$$P(X=x)=f(x,\theta),\quad x=u_1,u_2,\cdots,\theta\in\Theta$$

则样本 $X_1,X_2,\ldots,X_n$的概率分布为

$$P(X_1=x_1,X_2=x_2,\cdots,X_n=x_n)$$

$$=f(x_1,\theta)f(x_2,\theta)\cdots f(x_n,\theta)$$

记为 或

$$=L(x_1,x_2,\cdots,x_n,\theta)=L(\theta)\qquad x_i=u_1,u_2,\cdots;$$

$$i=1,2,\cdots;n,\theta\in\Theta$$

称 $L(\theta)$ 为样本的**似然函数**

极大似然法的思想

选择适当的$\theta=\hat{\theta}$,使$L(\theta)$取最大值, 即

$$L(x_1,x_2,\cdots,x_n,\hat{\theta}) = \max_{\theta\in\Theta}\{f(x_1,\theta)f(x_2,\theta)\cdots f(x_n,\theta)\}$$

称这样得到的 $\hat{\theta}=g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$

为参数 θ 的**极大似然估计值** 简记 $\hat{\theta}_{mle}$

称统计量 $\hat{\theta}=g(X_1,X_2,\cdots,X_n)$

为参数 θ 的**极大似然估计量** 简记 $\hat{\theta}_{MLE}$

注1 若 X 连续, 取 $f(x_i,\theta)$ 为 X_i 的密度函数

似然函数为 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta)$

注2 未知参数可以不止一个, 如 $\theta_1,\dots,\theta_k$

设 X 的密度(或分布)为 $f(x,\theta_1,\cdots,\theta_k)$

则定义似然函数为

$$L(x_1,\cdots,x_n;\theta_1,\cdots,\theta_k)$$

$$=L(\theta_1,\cdots,\theta_k)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta_1,\cdots,\theta_k)$$

$$-\infty<x_i<+\infty,\ i=1,2,\cdots,n \qquad (\theta_1,\cdots;\theta_k)\in\Theta$$

若 $L(x_1,\cdots;x_n;\theta_1,\cdots;\theta_k)$ 关于 $\theta_1, \ldots, \theta_k$ 可微,则称

$$\frac{\partial}{\partial\theta_r}L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)=0 \quad r=1,2,\cdots,k$$

为似然方程组

若对于某组给定的样本值 $x_1, x_2,\ldots, x_n$,
参数 $\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\cdots,\hat{\theta}_k$ 使似然函数取得最大值, 即

$$L(x_1,\cdots,x_n;\widehat{\theta}_1,\cdots,\widehat{\theta}_k)$$

$$=\max_{(\theta_1,\theta_2,\cdots;\theta_k)\in\Theta}\{L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)\}$$

则称 $\widehat{\theta}_1,\cdots,\widehat{\theta}_k$ 为 $\theta_1,\ldots, \theta_k$ 的极大似然估计值

显然，

$$\hat{\theta}_r = g(x_1, x_2, \cdots, x_n) \qquad r = 1,2,\cdots,k$$

称统计量

$$\hat{\theta}_r = g(X_1, X_2, \cdots, X_n) \qquad r = 1,2,\cdots,k$$

为 $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ 的极大似然估计量

例7 设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, $x_1, x_2,\ldots, x_n$ 是 X 的样本值, 求 μ, σ^2 的极大似然估计.

解 $L(x_1, x_2, \cdots, x_n; \mu, \sigma^2)$

$$=\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}(\sigma^2)^{\frac{n}{2}}} e^{-\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\ln L = -\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2} - \frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln(\sigma^2)$$

似然方程组为

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial}{\partial \mu}\ln L\right) = \dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu)=0 \\ \left(\dfrac{\partial}{\partial (\sigma^2)}\ln L\right) = \dfrac{1}{2(\sigma^2)^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2-\dfrac{n}{2(\sigma^2)}=0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \hat{\mu}_{mle}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=\bar{x} \\ \hat{\sigma^2}_{mle}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 \end{cases}$$

μ, σ^2 的极大似然估计量分别为

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\bar{X}, \quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2=S_n^2$$

极大似然估计方法

1）写出似然函数 L

2）求出 $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \cdots, \hat{\theta}_k$ ，使得

$$L(x_1, x_2, \cdots, x_n; \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \cdots, \hat{\theta}_k)$$

$$= \max_{(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k) \in \Theta} \{L(x_1, x_2, \cdots, x_n; \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k)\}$$

若 L是$\theta_1,\cdots,\theta_k$的可微函数,解似然方程组

$$\frac{\partial}{\partial \theta_r} L(x_1, x_2, \cdots, x_n; \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k) = 0$$

$$r = 1,2,\cdots,k$$

可得未知参数的极大似然估计值$\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \cdots, \hat{\theta}_k$

然后, 再求得极大似然估计量.

若 L不是$\theta_1,\cdots,\theta_k$的可微函数, 需用其它方法求极大似然估计值. 请看下例:

例8 设 $X \sim U(a,b)$, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 是 X 的一个样本值, 求 a , b 的极大似然估计值与极大似然估计量.

解 X 的密度函数为

$$f(x;a,b)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

似然函数为

$$L(x_1,x_2,\cdots,x_n;a,b)=\begin{cases}\dfrac{1}{(b-a)^n}, & a<x_i<b,\ i=1,2,\cdots,n\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

似然函数只有当 $a < x_i < b, i = 1,2,\ldots, n$ 时才能获得最大值, 且 a 越大, b 越小, L 越大.

令 $x_{\min} = \min\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

$x_{\max} = \max\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

取 $\hat{a} = x_{\min}, \ \hat{b} = x_{\max}$

则对满足 $a \le x_{\min} \le x_{\max} \le b$ 的一切 $a < b$,

都有 $$\frac{1}{(b-a)^n} \le \frac{1}{(x_{\max} - x_{\min})^n}$$

故 $\hat{a} = x_{\min}, \ \hat{b} = x_{\max}$

是 a, b 的极大似然估计值.

$$X_{\min} = \min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$$

$$X_{\max} = \max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$$

分别是 a, b 的极大似然估计量.

问 题

1) 待估参数的极大似然估计是否一定存在?

2) 若存在, 是否惟一?

例9 设 $X \sim U(a-½,\ a+½)$, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 是 X的一个样本, 求 a 的极大似然估计值.

解 由上例可知, 当

$$\hat{a}-\frac{1}{2} \le x_{\min} \le x_{\max} \le \hat{a}+\frac{1}{2}$$

时, L 取最大值 1, 即

$$x_{\max}-\frac{1}{2} \le \hat{a} \le x_{\min}+\frac{1}{2}$$

显然, a 的极大似然估计值可能不存在, 也可能不惟一.

不仅如此，任何一个统计量

$$g(X_1, X_2, \cdots, X_n)$$

若满足

$$x_{(n)} - \frac{1}{2} \le g(x_1, x_2, \cdots, x_n) \le x_{(1)} + \frac{1}{2}$$

都可以作为 a 的估计量.

极大似然估计的不变性

设 $\hat{\theta}$ 是 θ 的极大似然估计值，$u(\theta)$

$(\theta \in \Theta)$ 是 θ 的函数，且有单值反函数

$$\theta = \theta(u), \quad u \in U$$

则 $\hat{u} = u(\hat{\theta})$ 是 $u(\theta)$ 的极大似然估计值.

如 在正态总体$N(\mu,\sigma^2)$中，σ^2的极大似然估计值为

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$$

$\sigma=\sqrt{\sigma^2}$ 是σ^2的单值函数，且具有单值反函数，故σ的极大似然估计值为

$$\hat{\sigma}=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$$

$\lg\sigma$的极大似然估计值为

$$\widehat{\lg\sigma}=\lg\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$$

作业 P.229 习题七

2	3	5	7
8	10 (1)		*14