§7.3 区间估计

引例 已知 $X \sim N(\mu, 1)$,

μ 的无偏、有效点估计为 $\overline{X}$

$\downarrow$ 常数　　　　$\downarrow$ 随机变量

不同样本算得的 μ 的估计值不同，因此除了给出 μ 的点估计外，还希望根据所给的样本确定一个**随机区间**，使其包含参数真值的概率达到指定的要求.

如引例中，要找一个区间,使其包含 μ 的真值的概率为0.95.（设 $n = 5$）

$$\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{1}{5}\right) \Rightarrow \frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{1/5}} \sim N(0, 1)$$

取 $\alpha = 0.05$

查表得 $z_{\alpha/2} = 1.96$

这说明 $P\left(\left|\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{1/5}}\right| \geq 1.96\right) = 0.05$

即 $P\left(\bar{X}-1.96\sqrt{1/5} \leq \mu \leq \bar{X}+1.96\sqrt{1/5}\right) = 0.95$

称随机区间 $\left(\bar{X}-1.96\sqrt{1/5},\ \bar{X}+1.96\sqrt{1/5}\right)$

为未知参数 μ 的置信度为0.95的置信区间.

置信区间的意义

反复抽取容量为5的样本,都可得一个区间,此区间不一定包含未知参数μ的真值, 而包含真值的区间占95%.

若测得 一组样本值, 算得 $\bar{x} = 1.86$

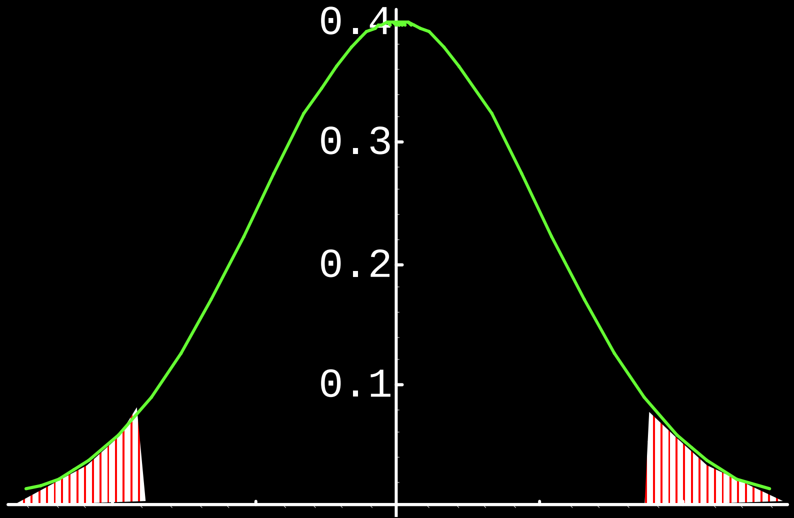
则得一区间$(1.86 - 0.877,\ 1.86 + 0.877)$

它可能包含也可能不包含μ的真值, 反复抽样得到的区间中有95%包含 μ 的真值.

为何要取 $z_{\alpha/2}$？

当置信区间为$\left(\bar{X}-z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{1/5},\ \bar{X}+z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{1/5}\right)$ 时

区间的长度为$2z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{1/5}$ —— 达到最短

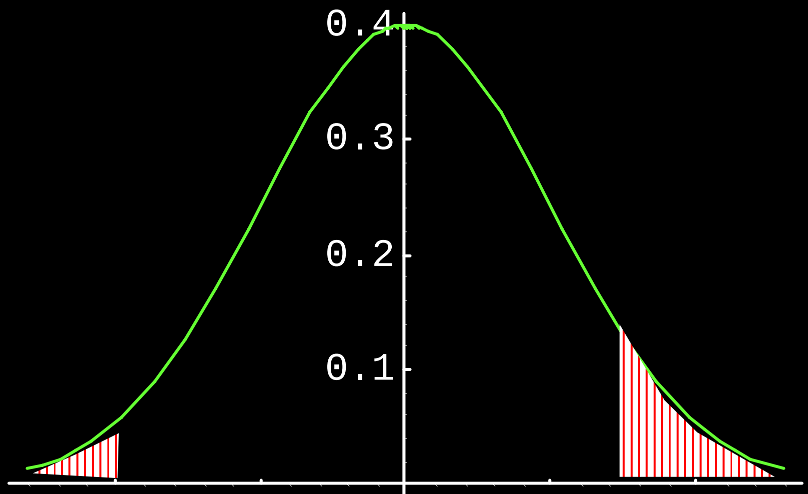


$z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ $z_{\frac{\alpha}{2}}$

取 $\alpha = 0.05$

$$z_{\frac{\alpha}{2}} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1.96 - (-1.96)$$

$$= 3.92$$



$z_{1-\frac{\alpha}{3}}$ $z_{\frac{2\alpha}{3}}$

$$z_{\frac{2\alpha}{3}} - z_{1-\frac{\alpha}{3}} = 1.84 - (-2.13)$$

$$= 3.97$$

置信区间的定义

设 θ 为待估参数, α 是一给定的数, ($0<\alpha<1$). 若能找到统计量 T_1, T_2 , 使

$$P(T_1 \le \theta \le T_2) = 1-\alpha \qquad \theta \in \Theta$$

则称 $[T_1, T_2]$ 为 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间或区间估计.

T_1 —— 置信下限

T_2 —— 置信上限

几点说明

- 置信区间的长度 $T_2 - T_1$ 反映了估计精度 $T_2 - T_1$ 越小，估计精度越高.
- α 反映了估计的可靠度, α 越小, 越可靠. α 越小, 1- α 越大, 估计的可靠度越高,但这时, $T_2 - T_1$ 往往增大, 因而估计精度降低.
- α 确定后, 置信区间 的选取方法不唯一, 常选最小的一个.

处理“可靠性与精度关系”的原则

先

再

求参数置信区间

保 证 可靠性

提 高 精 度

求置信区间的步骤

- 寻找一个样本的函数

$$g(X_x, X_2, \cdots, X_n, \theta)$$ —— 称为**枢轴量**

它含有待估参数，不含其它未知参数，它的分布已知，且分布不依赖于待估参数(常由θ的点估计出发考虑).

例如

$$\overline{X} \sim N(\mu, 1/5)$$

取枢轴量

$$g(X_1, X_2, \cdots; X_n, \mu) = \frac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{1/5}} \sim N(0,1)$$

- 给定置信度 $1-\alpha$,定出常数 a , b ,使得

$$P(a < g(X_1, X_2 \cdots, X_n, \theta) < b) = 1-\alpha$$

(引例中 $a = -1.96$, $b = 1.96$)

- 由 $a<g(X_1,X_2,\cdots X_n,\theta)<b$ 解出 T_1 , T_2

得置信区间 $(T_1,\ T_2)$

引例中

$$(T_1,\ T_2) = (\bar{X} - 1.96\sqrt{1/5},\ \ \bar{X} + 1.96\sqrt{1/5})$$

置信区间常用公式

(一) 一个正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的情形

(1) 方差 σ^2 已知, μ 的置信区间

$$\left(\overline{X} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \quad \cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

推导 由 $\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ 选取枢轴量

$$g(X_1, X_2, \cdots, X_n, \mu) = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

由 $P\left(\left|\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \geq z_{\frac{\alpha}{2}}\right)=\alpha$ 确定 $z_{\frac{\alpha}{2}}$

解 $\left|\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| < z_{\frac{\alpha}{2}}$

得 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\overline{X}-z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}},\quad \overline{X}+z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right)$$

(2) 方差σ^2未知，μ的置信区间

$$\left(\bar{X}-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}},\ \bar{X}+t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right) \quad \cdots\cdots\cdots \quad (2)$$

推导 选取枢轴量 $T=\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim T(n-1)$

由 $P\left(\left|\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\right| \geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)=\alpha$ 确定 $t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$

故 μ 的置信区间为 $\left(\bar{X}-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\dfrac{S}{\sqrt{n}},\ \bar{X}+t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\dfrac{S}{\sqrt{n}}\right)$

(3) 当 μ 已知时，方差 σ^2 的 置信区间

取枢轴量 $Q=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(n)$ 由概率

$$P\left(\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)<\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}<\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)\right)=1-\alpha$$

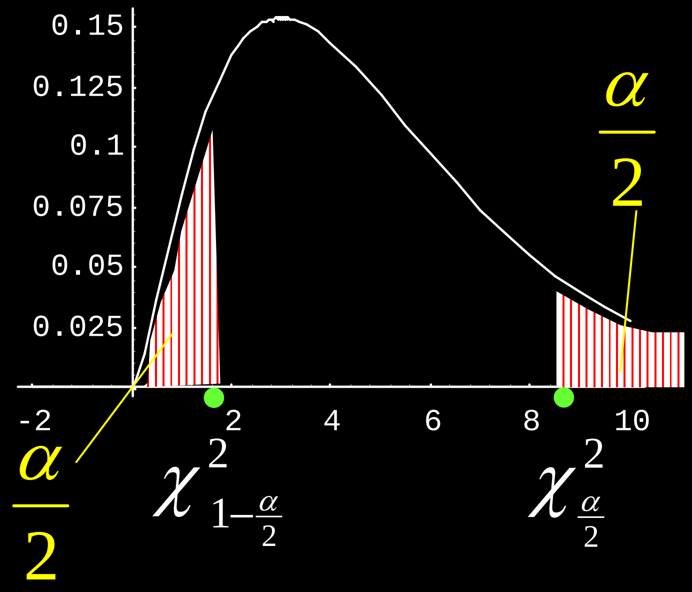
得 σ^2 的置信度为 $1-\alpha$ 置信区间为

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)},\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)}\right) \quad \cdots\cdots\cdots \quad (3)$$

(4) 当 μ 未知时，方差 σ^2 的置信区间

选取 $K=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$ 则由

$$P\left(\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}<\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}<\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}\right)=1-\alpha$$



得 σ^2 的置信区间为

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\ \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right) \quad \cdots\cdots\cdots \quad (4)$$

例1 某工厂生产一批滚珠，其直径 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，现从某天的产品中随机抽取 6 件，测得直径为

15.1，14.8，15.2，14.9，14.6，15.1

(1) 若$\sigma^2=0.06$, 求μ的置信区间
(2) 若σ^2未知,求 μ 的置信区间
(3) 求方差σ^2的置信区间.

置信度均为0.95

解 (1) $\overline{X} \sim N(\mu, 0.06/6)$ 即 $N(\mu,0.01)$

$$\frac{\overline{X}-\mu}{0.1} \sim N(0,1) \quad z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.025} = 1.96$$

由给定数据算得 $\bar{x}=\dfrac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}x_i=14.95$

由公式 (1) 得 μ 的置信区间为

$$(14.95-1.96\times 0.1,\quad 14.95+1.96\times 0.1)$$

$$=(14.75,\quad 15.15)$$

(2) 取 $T=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{6}}\sim t(5)$ 查表 $t_{0.025}(5)=2.5706$

由给定数据算得 $\bar{x}=14.95$

$$s^2=\frac{1}{5}\left(\sum_{i=1}^{6}x_i^2-6\bar{x}^2\right)=0.051.\quad s=0.226$$

由公式 (2) 得 μ 的置信区间为

$$\left(\bar{x}-\frac{s}{\sqrt{6}}t_{0.025}(5),\quad \bar{x}+\frac{s}{\sqrt{6}}t_{0.025}(5)\right)$$

$$=(14.71,\quad 15.187)$$

(3) 选取枢轴量 $K=\dfrac{5S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(5)$ $s^2=0.051.$

查表得 $\chi^2_{0.025}(5)=12.833,\quad \chi^2_{0975}(5)=0.831$

由公式 (4) 得 σ^2 的置信区间为

$$\left(\frac{5s^2}{\chi^2_{0.025}(5)},\quad \frac{5s^2}{\chi^2_{0.975}(5)}\right)=(0.0199,\quad 0.3069)$$

(二) 两个正态总体的情形

$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$为取自总体$N(\mu_1, \sigma_1{}^2)$的样本,

$(Y_1, Y_2, \cdots, Y_m)$为取自总体$N(\mu_2, \sigma_2{}^2)$的样本,

$\overline{X}, S_1^2$; $\overline{Y}, S_2^2$ 分别表示两样本的均值与方差

置信度为 $1-\alpha$

(1) σ_1^2, σ_2^2 已知, $\mu_1 - \mu_2$ 的置信区间

$\bar{X} \sim N(\mu_1, \frac{\sigma_1^2}{n})$, $\bar{Y} \sim N(\mu_2, \frac{\sigma_2^2}{m})$ $\bar{X}, \bar{Y}$ 相互独立,

$$\Longrightarrow \quad \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}} \sim N(0,1)$$

$\mu_1 - \mu_2$ 的置信区间为

$$\left((\bar{X} - \bar{Y}) - z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}},\ (\bar{X} - \bar{Y}) + z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}} \right)$$

…… …… …… (5)

(2) σ_1^2, σ_2^2未知(但$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$) $\mu_1-\mu_2$的置信区间

$$\bar{X}-\bar{Y} \sim N(\mu_1-\mu_2, \frac{\sigma^2}{n}+\frac{\sigma^2}{m})$$

$$\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}\sigma} \sim N(0,1)$$

$$\frac{(n-1)S_1^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

$$\frac{(m-1)S_2^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(m-1)$$

$$\frac{(n-1)S_1^2}{\sigma^2}+\frac{(m-1)S_2^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n+m-2)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}\sqrt{\frac{(n-1)S_1^2+(m-1)S_2^2}{n+m-2}}} \sim t(n+m-2)$$

$$P\left(\left|\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}\sqrt{\frac{(n-1)S_1^2+(m-1)S_2^2}{n+m-2}}}\right|<t_{\frac{\alpha}{2}}\right)=1-\alpha$$

$\mu_1-\mu_2$ 的置信区间为

$$\left((\bar{X}-\bar{Y})\pm t_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}\sqrt{\frac{(n-1)S_1^2+(m-1)S_2^2}{n+m-2}}\right)$$

$\cdots\ \cdots\ \cdots\quad (6)$

(3) σ_1^2,σ_2^2 未知，$n, m > 50$, $\mu_1-\mu_2$的置信区间

$$\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}\approx\frac{S_1^2}{n}+\frac{S_2^2}{m}$$

$$\longrightarrow \frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n}+\dfrac{S_2^2}{m}}}\sim N(0,1)$$

$\bar{X},\bar{Y}$ 相互独立，因此$\mu_1-\mu_2$的置信区间为

$$\left((\bar{X}-\bar{Y})\pm z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S_1^2}{n}+\frac{S_2^2}{m}}\right)\quad\cdots\cdots(7)$$

(4) σ_1^2,σ_2^2 未知，但 $n = m$ ，$\mu_1 - \mu_2$ 的置信区间

令 $Z_i = X_i - Y_i$, $i = 1,2,\ldots, n$, 可以将它们看成来

自正态总体 $Z \sim N(\mu_1 - \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ 的样本

$$\overline{Z} = \overline{X} - \overline{Y},$$

$$S_Z^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left[(X_i - Y_i) - (\overline{X} - \overline{Y})\right]^2$$

仿单个正态总体公式(2) $\mu_1 - \mu_2$ 的置信区间为

$$\left((\overline{X} - \overline{Y}) \pm t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S_Z}{\sqrt{n}}\right) \quad \cdots\cdots\cdots \quad (8)$$

(5) 方差比 $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信区间 (μ_1, μ_2 未知)

取枢轴量 $F=\dfrac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}=\dfrac{S_1^2\big/S_2^2}{\sigma_1^2\big/\sigma_2^2}\sim F(n-1,m-1)$

因此, 方差比 $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信区间为

$$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n-1,m-1)},\quad \frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1,m-1)}\right)$$

…… …… …… (9)

(6) 方差比 $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信区间 (μ_1, μ_2 已知)

取枢轴量

$$F=\frac{\dfrac{1}{n}\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}}{\dfrac{1}{m}\dfrac{\sum_{j=1}^{m}(Y_j-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}}=\frac{\dfrac{m}{n}\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_1)^2}{\sum_{j=1}^{m}(Y_j-\mu_2)^2}}{\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}}\sim F(n,m)$$

因此, 方差比 $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信区间为

$$\left(\frac{\dfrac{m}{n} \cdot \dfrac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu_1)^2}{\sum_{j=1}^{m} (Y_j - \mu_2)^2}}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n,m)}, \frac{\dfrac{m}{n} \cdot \dfrac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu_1)^2}{\sum_{j=1}^{m} (Y_j - \mu_2)^2}}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n,m)} \right) \cdots (10)$$

例2 某厂利用两条自动化流水线罐装番茄酱. 现分别从两条流水线上抽取了容量分别为13与17的两个相互独立的样本

$$X_1, X_2, \cdots, X_{13} \text{ 与 } Y_1, Y_2, \cdots, Y_{17}$$

已知 $\bar{x} = 10.6g, \quad \bar{y} = 9.5g,$

$$s_1^2 = 2.4g^2, \quad s_2^2 = 4.7g^2$$

假设两条流水线上罐装的番茄酱的重量都服从正态分布, 其均值分别为 μ_1 与 μ_2

(1) 若它们的方差相同, $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$,求均值差 $\mu_1-\mu_2$ 的置信度为0.95 的置信区间;

(2) 若不知它们的方差是否相同, 求它们的方差比的置信度为 0.95 的置信区间

解 (1) 取枢轴量

$$\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}\sqrt{\frac{(n-1)S_1^2+(m-1)S_2^2}{n+m-2}}} \sim t(n+m-2)$$

查表得 $t_{0.025}(28)=2.0484$

由公式(6) $\mu_1-\mu_2$ 的置信区间为

$$\left((\bar{X}-\bar{Y})\pm t_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}\sqrt{\frac{(n-1)S_1^2+(m-1)S_2^2}{n+m-2}}\right)$$

$$=(-0.3545,\quad 2.5545)$$

(2) 枢轴量为$F=\dfrac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}=\dfrac{S_1^2 \big/ S_2^2}{\sigma_1^2 \big/ \sigma_2^2}\sim F(12,16)$

查表得$F_{0.025}(12,\ 16)=2.89$

$$F_{0.975}(12,\ 16)=\frac{1}{F_{0.025}(16,\ 12)}\approx\frac{1}{3.16}$$

由公式(9)得方差比 $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信区间为

$$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{0.025}(n-1,m-1)},\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{0.975}(n-1,m-1)}\right)$$

$=(\ 0.1767,\ \ 1.6136\ )$

利用数学软件包求正态总体未知参数的置信区间的例题可见

第十章 §10.2（P.318)

（三） 单侧置信区间

定义 对于给定的 $\alpha\,(0<\alpha<1)$，θ是待估参数

$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是总体 X 的样本，

若能确定一个统计量

$\underline{\theta}=\underline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ （或$\overline{\theta}=\overline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$）

使得 $P(\underline{\theta}<\theta)=1-\alpha$ （或$P(\theta<\overline{\theta})=1-\alpha$）

则称 $(\underline{\theta}, +\infty)$ （或$(-\infty, \overline{\theta})$）

为置信度为1 - α 的单侧置信区间.

$\underline{\theta}$ —— 单侧置信下限 $\overline{\theta}$ —— 单侧置信上限

例3 已知灯泡寿命X服从正态分布，从中随机抽取 5 只作寿命试验，测得寿命为

1050 , 1100 , 1120 , 1250 , 1280 (小时)

求灯泡寿命均值的单侧置信下限与寿命方差的单侧置信上限. 取 $\alpha = 0.05$.

解 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，μ, σ^2 未知 $n = 5, \bar{x} = 1160,$

$$s^2 = \frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^{5} x_i^2 - 5\bar{x}\right) = 9950.$$

(1) 选取枢轴量 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(4)$

$$t_\alpha = t_{0.05} = 2.1318$$

$$\underline{\mu} = \underline{x} - t_{0.05} \times \frac{s}{\sqrt{5}} = 1064.9$$

(2) 选取枢轴量 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(4)$

$$\chi^2_{0.95}(4) = 0.711$$

$$\overline{\sigma^2} = \frac{4s^2}{\chi^2_{0.95}(4)} = 55977$$

（四）非正态总体均值的区间估计

若总体 X 的分布未知，但样本容量很大，

由中心极限定理，可近似地视 $\bar{X} \sim N(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n})$

若σ^2已知，则 μ 的置信度为$1-\alpha$的置信区间

可取为 $$\bar{X} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

若σ^2未知，则 μ 的置信度为$1-\alpha$的置信区间

可取为 $$\bar{X} \pm t_{\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}$$

例4 设 X 服从参数为 p 的0-1分布, 样本为

$$X_1, X_2, \cdots, X_n \quad (n > 50).$$

求 p 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间

解 $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim B(n, p) \longrightarrow \dfrac{\sqrt{n}(\overline{X}-p)}{\sqrt{p(1-p)}} \sim N(0,1)$ (近似)

$$P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\sqrt{n}(\overline{X}-p)}{\sqrt{p(1-p)}} < z_{\frac{\alpha}{2}}\right) \approx 1-\alpha \longrightarrow 0 \le \frac{n(\overline{X}-p)^2}{p(1-p)} < z_{\frac{\alpha}{2}}^2$$

$$\longrightarrow (n + z_{\frac{\alpha}{2}}^2) p^2 - (2n\overline{X} + z_{\frac{\alpha}{2}}^2) p + n\overline{X}^2 < 0$$

令 $a = (n + z_{\frac{\alpha}{2}}^2), b = -(2n\overline{X} + z_{\frac{\alpha}{2}}^2), c = n\overline{X}^2$

$$p_1 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \quad p_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

所以参数 p 的置信区间为(p_1, p_2)

例如 自一大批产品中抽取100个样品,其中有60个一级品，求这批产品的一级品率 p 的置信度为0.95的置信区间.

$$n=100, \quad \bar{x}=0.6, \quad \alpha=0.05, \quad z_{0.025}=1.96$$

$$a=100+1.96^2=103.84 \quad c=100\times 0.6^2=36$$

$$b=-(2\times 100\times 0.6+1.96^2)=-123.84$$

p 的置信区间为$(p_1, p_2)=(0.50, \ 0.69)$

作业 P.232 习题七

22　　23

29　　30

32