§8.2 正态总体的参数检验

一个正态总体

（1）关于μ 的检验

拒绝域的推导

给定显著性水平α与样本值$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，σ^2 已知，需检验：

$$H_0 : \mu = \mu_0 ; \quad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

构造统计量 $$U = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

$$P(\text{拒绝}H_0 \mid H_0\text{为真})$$

$$= P\left(\left| \overline{X} - \mu_0 \right| \geq k \mid \mu = \mu_0 \right) = P_{H_0}\left(\left| \overline{X} - \mu_0 \right| \geq k \right)$$

$$= P_{H_0}\left(\left| \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \right| \geq \frac{k}{\sigma/\sqrt{n}} \right) = P_{H_0}\left(\left| \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \right| \geq Z_{\frac{\alpha}{2}} \right) = \alpha$$

$$\text{取} k = Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

所以本检验的拒绝域为

$$\mathfrak{R}: \quad |U| \geq z_{\frac{\alpha}{2}}$$ --------- $\boxed{U\text{ 检验法}}$

U 检验法 (σ^2 已知)

原假设 H_0	备择假设 H_1	检验统计量及其 H_0为真时的分布	拒绝域
$\mu=\mu_0$	$\mu\neq\mu_0$	$U=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$	$\lvert U\rvert \geq z_{\frac{\alpha}{2}}$
$\mu\geq\mu_0$	$\mu<\mu_0$		$U\leq -z_\alpha$
$\mu\leq\mu_0$	$\mu>\mu_0$		$U \geq z_\alpha$

T 检验法 (σ^2 未知)

原假设 H_0	备择假设 H_1	检验统计量及其 H_0为真时的分布	拒绝域
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$T = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\dfrac{S}{\sqrt{n}}} \sim t(n-1)$	$\lvert T \rvert \geq t_{\frac{\alpha}{2}}$
$\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$		$T \leq -t_{\alpha}$
$\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$		$T \geq t_{\alpha}$

例1 某厂生产小型马达,说明书上写着:在正常负载下平均消耗电流不超过0.8 安培.

随机测试16台马达, 平均消耗电流为0.92安培，标准差为0.32安培.

设马达所消耗的电流 服从正态分布, 取显著性水平为$\alpha = 0.05$, 问根据此样本, 能否否定厂方的断言?

解 根据题意待检假设可设为

$H_0: \mu \le 0.8$； $H_1: \mu > 0.8$

σ未知，选检验统计量：$T = \dfrac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{16}} \sim T(15)$

拒绝域为 $\mathfrak{R}$：$T = \dfrac{\bar{x} - 0.8}{s/\sqrt{n}} > 1.753 = t_{0.05}(15)$

将 $\bar{x} = 0.92, s = 0.32$，代入得

$T = 1.5 < 1.735$，落在拒绝域$\mathfrak{R}$外

故接受原假设 H_0，即不能否定厂方断言.

解二 H_0: $\mu \geq 0.8$; H_1: $\mu < 0.8$

选用统计量 $T = \dfrac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{16}} \sim T(15)$

拒绝域 $\mathscr{R}: T = \dfrac{\bar{x} - 0.8}{s/\sqrt{n}} < -1.753 = -t_{0.05}(15)$

现 $T = 1.5 > -1.735$, 落在拒绝域 $\mathscr{R}$ 外

故接受原假设, 即否定厂方断言.

由例1可见：对问题的提法不同(把哪个假设作为原假设)，统计检验的结果也会不同.

上述两种解法的立场不同，因此得到不同的结论.

第一种假设是不轻易否定厂方的结论；

第二种假设是不轻易相信厂方的结论.

为何用假设检验处理同一问题会得到截然相反的结果?

这里固然有把哪个假设作为原假设从而引起检验结果不同这一原因；除此外还有一个根本的原因，即样本容量不够大.

若样本容量足够大，则不论把哪个假设作为原假设所得检验结果基本上应该是一样的．否则假设检验便无意义了！

由于假设检验是控制犯第一类错误的概率，使得拒绝原假设 H_0 的决策变得比较慎重，也就是 H_0 得到特别的保护. 因而，通常把有把握的，经验的结论作为原假设，或者尽量使后果严重的错误成为第一类错误.

（2）关于 σ^2 的检验 χ^2检验法

原假设 H_0	备择假设 H_1	检验统计量及其在 H_0为真时的分布	拒绝域
$\sigma^2=\sigma_0^2$	$\sigma^2\neq\sigma_0^2$	$\chi^2=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma_0^2}$ $\sim\chi^2(n)$ （μ 已知）	$\chi^2\le\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)$ 或 $\chi^2\ge\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)$
$\sigma^2\geq\sigma_0^2$	$\sigma^2<\sigma_0^2$		$\chi^2\le\chi^2_{1-\alpha}(n)$
$\sigma^2\leq\sigma_0^2$	$\sigma^2>\sigma_0^2$		$\chi^2\ge\chi^2_{\alpha}(n)$

原假设 H_0	备择假设 H_1	检验统计量及其在 H_0为真时的分布	拒绝域
$\sigma^2=\sigma_0^2$	$\sigma^2\neq\sigma_0^2$	$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n-1)$ （μ 未知）	$\chi^2\le\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ 或 $\chi^2\ge\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$
$\sigma^2\ge\sigma_0^2$	$\sigma^2<\sigma_0^2$		$\chi^2\le\chi^2_{1-\alpha}(n-1)$
$\sigma^2\le\sigma_0^2$	$\sigma^2>\sigma_0^2$		$\chi^2\ge\chi^2_{\alpha}(n-1)$

例2 某汽车配件厂在新工艺下对加工好的25个活塞的直径进行测量，得样本方差$S^2=0.00066$.已知老工艺生产的活塞直径的方差为0.00040. 问进一步改革的方向应如何？（P.244 例6）

解 一般进行工艺改革时，若指标的方差显著增大，则改革需朝相反方向进行以减少方差；若方差变化不显著，则需试行别的改革方案.

设测量值

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \quad \sigma^2 = 0.00040$$

需考察改革后活塞直径的方差是否不大于改革前的方差？故待检验假设可设为：

$$H_0: \sigma^2 \le 0.00040;\ H_1: \sigma^2 > 0.00040.$$

此时可采用效果相同的单边假设检验

$$H_0: \sigma^2 = 0.00040;\quad H_1: \sigma^2 > 0.00040.$$

取统计量 $\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$

拒绝域 $\mathscr{R}$: $\chi^2 \geq \chi^2_{0.05}(24) = 36.415$

$$\chi_0^{\ 2} = \frac{24 \times 0.00066}{0.00040} = 39.6 > 36.415$$

落在$\mathscr{R}$内, 故拒绝H_0. 即改革后的方差显著大于改革前, 因此下一步的改革应朝相反方向进行.

两个正态总体

设 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^{\,2}),\ Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^{\,2})$

两样本 X, Y 相互独立，

样本 $(X_1, X_2, \ldots, X_n), (Y_1, Y_2, \ldots, Y_m)$

样本值 $(x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_m)$

显著性水平 α

(1) 关于均值差 $\mu_1 - \mu_2$ 的检验

原假设 H_0	备择假设 H_1	检验统计量及其在 H_0 为真时的分布	拒绝域
$\mu_1-\mu_2=\delta$	$\mu_1-\mu_2\neq\delta$	$U=\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}-\delta}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n}+\dfrac{\sigma_2^2}{m}}}$ $\sim N(0,1)$ (σ_1^2, σ_2^2 已知)	$\lvert U\rvert \geq z_{\frac{\alpha}{2}}$
$\mu_1-\mu_2\geq\delta$	$\mu_1-\mu_2<\delta$		$U\leq -z_{\alpha}$
$\mu_1-\mu_2\leq\delta$	$\mu_1-\mu_2>\delta$		$U\geq z_{\alpha}$

原假设 H_0	备择假设 H_1	检验统计量及其在 H_0为真时的分布	拒绝域
$\mu_1-\mu_2=\delta$	$\mu_1-\mu_2\neq\delta$	$T=\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}-\delta}{\sqrt{\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{m}}S_w}\sim T(n+m-2)$	$\lvert T\rvert\geq t_{\frac{\alpha}{2}}$
$\mu_1-\mu_2\geq\delta$	$\mu_1-\mu_2<\delta$		$T\leq -t_{\alpha}$
$\mu_1-\mu_2\leq\delta$	$\mu_1-\mu_2>\delta$	$\left(\begin{array}{c}\sigma_1^2,\sigma_2^2\text{未知}\\ \sigma_1^2=\sigma_2^2\end{array}\right)$	$T\geq t_{\alpha}$

其中 $$S_w=\sqrt{\frac{(n-1)S_1^2+(m-1)S_2^2}{n+m-2}}$$

(2) 关于方差比σ_1^2/σ_2^2的检验

原假设 H_0	备择假设 H_1	检验统计量及其在 H_0为真时的分布	拒绝域
$\sigma_1^2=\sigma_2^2$	$\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$	$F=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\sim$ $F(n-1,m-1)$ μ_1,μ_2 均未知	$F\le F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1,m-1)$ 或 $F\ge F_{\frac{\alpha}{2}}(n-1,m-1)$
$\sigma_1^2\ge\sigma_2^2$	$\sigma_1^2<\sigma_2^2$		$F\le F_{1-\alpha}(n-1,m-1)$
$\sigma_1^2\le\sigma_2^2$	$\sigma_1^2>\sigma_2^2$		$F\ge F_{\alpha}(n-1,m-1)$

例3　杜鹃总是把蛋生在别的鸟巢中，现从两种鸟巢中得到杜鹃蛋24个.其中9个来自一种鸟巢，15个来自另一种鸟巢，测得杜鹃蛋的长度(mm)如下:

$n=9$	21.2 21.6 21.9 22.0 22.0 22.2 22.8 22.9 23.2	$\bar{x}=22.20$ $s_1^2=0.4225$
$m=15$	19.8 20.0 20.3 20.8 20.9 20.9 21.0 21.0 21.0 21.2 21.5 22.0 22.0 22.1 22.3	$\bar{y}=21.12$ $s_2^2=0.5689$

试判别两个样本均值的差异是仅由随机因素造成的还是与来自不同的鸟巢有关（$\alpha = 0.05$）.

解 $H_0: \mu_1 = \mu_2$； $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$

取统计量 $T = \dfrac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{m}} S_w} \sim T(n+m-2)$

拒绝域 $\mathscr{R}$: $\quad |T| \geq t_{0.025}(22) = 2.074$

$$S_w = \sqrt{\frac{(n-1)S_1^2 + (m-1)S_2^2}{n+m-2}} = 0.718$$

统计量值 $T_0 = 3.568 > 2.074$. 落在$\Re_0$内,

拒绝H_0即蛋的长度与不同鸟巢有关.

例4 假设机器 A 和 B 都生产钢管, 要检验 A 和 B 生产的钢管内径的稳定程度. 设它们生产的钢管内径分别为 X 和 Y, 且都服从正态分布

$$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), \quad Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$$

现从机器 A和 B生产的钢管中各抽出18 根和13 根, 测得

$$s_1^2 = 0.34, \quad s_2^2 = 0.29,$$

设两样本相互独立. 问是否能认为两台机器生产的钢管内径的稳定程度相同?（取$\alpha = 0.1$）

解 设 $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$; $H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

$$S_1^2/S_2^2 \sim F(17, 12)$$

查表得 $F_{0.05}(17, 12) = 2.59$,

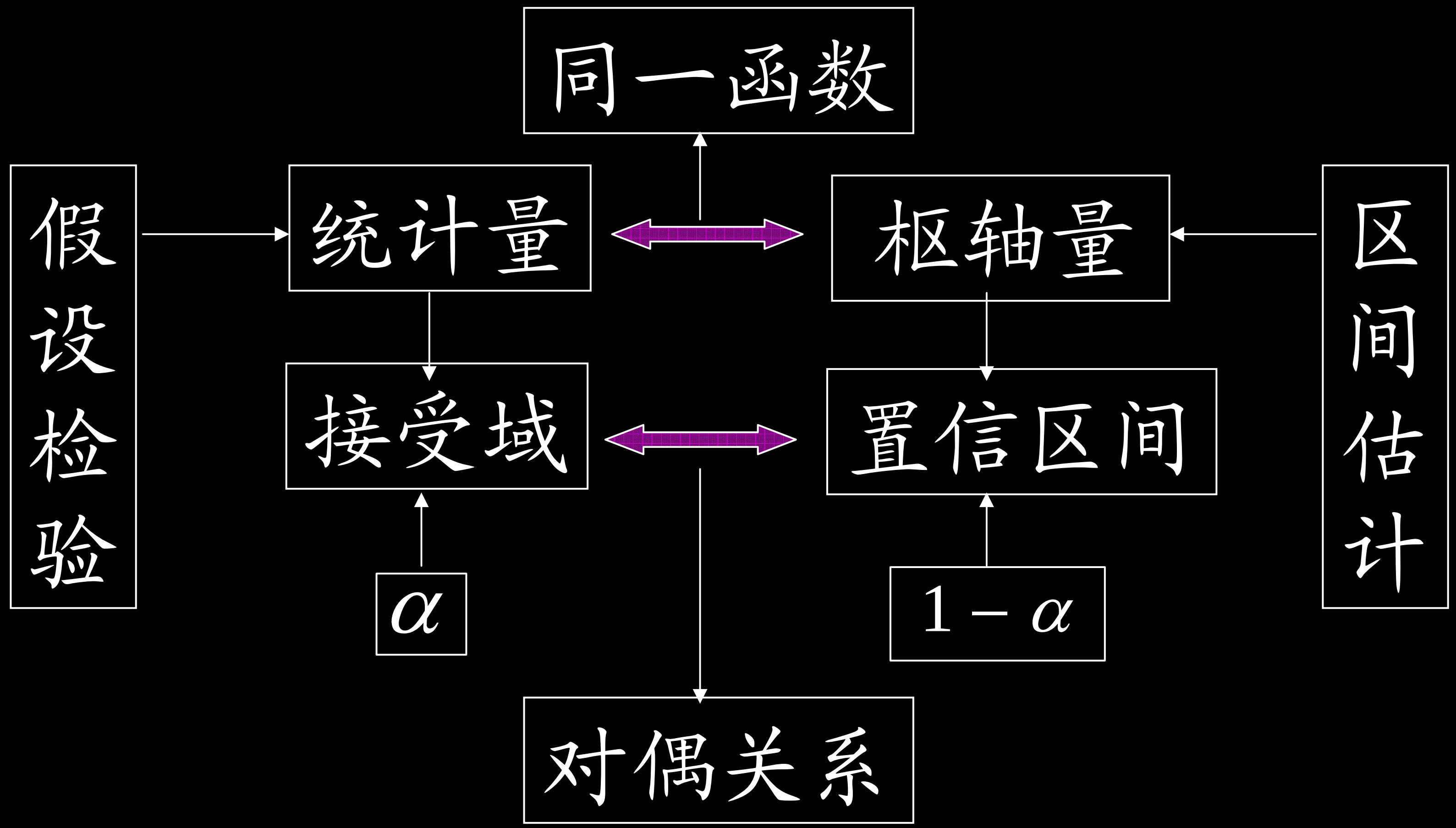
$$F_{0.95}(17, 12) = \frac{1}{F_{0.05}(12, 17)} = \frac{1}{2.38} = 0.42$$

拒绝域$\mathfrak{R}$ $\dfrac{S_1^2}{S_2^2} > 2.59$ 或 $\dfrac{S_1^2}{S_2^2} < 0.42$

由给定值算得: $\dfrac{s_1^2}{s_2^2} = \dfrac{0.34}{0.29} = 1.17$

落在拒绝域外,故接受原假设, 即认为内径的稳定程度相同.

假设检验与区间估计的联系



假设检验与置信区间对照

原假设 H_0	备择假设 H_1	检验统计量及其在 H_0为真时的分布	接受域
$\mu=\mu_0$	$\mu\neq\mu_0$	$U=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$ （σ^2 已知）	$\left\lvert\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right\rvert\leq z_{\frac{\alpha}{2}}$
待估参数		枢轴量及其分布	置信区间
μ		$U=\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$ （σ^2 已知）	$(\bar{x}-z_{\frac{\alpha}{2}}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}},\bar{x}+z_{\frac{\alpha}{2}}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}})$

原假设 H_0	备择假设 H_1	检验统计量及其在 H_0为真时的分布	接受域
$\mu=\mu_0$	$\mu\neq\mu_0$	$T=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim T(n-1)$ （σ^2未知）	$\left\lvert\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\right\rvert\le t_{\frac{\alpha}{2}}$

待估参数	枢轴量及其分布	置信区间
μ	$T=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim T(n-1)$ （σ^2未知）	$\left(\overline{x}-t_{\frac{\alpha}{2}}\dfrac{s}{\sqrt{n}},\ \overline{x}+t_{\frac{\alpha}{2}}\dfrac{s}{\sqrt{n}}\right)$

原假设 H_0	备择假设 H_1	检验统计量及其在 H_0为真时的分布	接受域
$\sigma^2=\sigma_0^2$	$\sigma^2\neq\sigma_0^2$	$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n-1)$ (μ未知)	$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}\le\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\le\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}$

待估参数	枢轴量及其分布	置信区间
σ^2	$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$ (μ未知)	$\left(\dfrac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\dfrac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$

例5 新设计的某种化学天平，其测量误差服从正态分布，现要求 99.7% 的测量误差不超过 0.1mg，即要求 $3\sigma \le 0.1$. 现拿它与标准天平相比，得10个误差数据，其样本方差$s^2 = 0.0009$.

试问在$\alpha = 0.05$ 的水平上能否认为满足设计要求？

解一 $H_0: \sigma \le 1/30$； $H_1: \sigma \ge 1/30$

μ 未知, 故选检验统计量

$$\chi^2 = \frac{9S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(9)$$

拒绝域 $\mathscr{R}$: $\chi^2 = \dfrac{9S^2}{1/900} > \chi^2_{0.05}(9) = 16.919$

现 $\chi^2 = \dfrac{9S^2}{1/900} = 7.29 < 16.919$

故接受原假设, 即认为满足设计要求.

解二 σ^2的单侧置信区间为

$$\left(0,\ \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}\right)=\left(0,\ \frac{0.0081}{3.325}\right)=(0,\ 0.0024)$$

H_0中的 $\sigma^2 \le \sigma_0^2 = \dfrac{1}{900} = 0.0011 < 0.0024$

则H_0成立，从而接受原假设，即认为

满足设计要求.

样本容量的选取

虽然当样本容量 n 固定时，我们不能同时控制犯两类错误的概率，但可以适当选取 n 的值，使犯取伪错误的概率 β 控制在预先给定的限度内.

样本容量 n 满足 如下公式:

$$\sqrt{n} \geq (z_{\alpha} + z_{\beta})\sigma / \delta \quad \text{——— 单边检验}$$

$$\sqrt{n} \geq (z_{\frac{\alpha}{2}} + z_{\beta})\sigma / \delta \quad \text{——— 双边检验}$$

U 检验法中 β 的计算公式

右边检验 $\beta = \Phi(z_\alpha - \lambda)$

左边检验 $\beta = \Phi(z_\alpha + \lambda)$

双边检验 $\beta = \Phi(z_{\frac{\alpha}{2}} - \lambda) + \Phi(z_{\frac{\alpha}{2}} + \lambda) - 1$

其 中 $\lambda = \dfrac{\mu - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$

例6 详见教材 P. 255 例12

例7（产品质量抽检方案）设有一大批产品其质量指标 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，以 μ 小者为佳．对要实行的验收方案

厂方要求：对高质量的产品 $(\mu < \mu_0)$ 能以高概率 $(1-\alpha)$ 为客户所接受；

客户要求：对低质量产品 $(\mu \geq \mu_0 + \delta)$ 能以高概率 $(1-\beta)$ 被拒绝．

设 $\mu_0=0.11,\ \sigma=0.3,\ \delta=0.09,\ \alpha=\beta=0.05.$

问应怎样安排抽样方案.

解 在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下进行 U 检验

$$H_0: \mu \le \mu_0; \qquad H_1: \mu \ge \mu_0+\delta$$

拒绝域为 $\Re$ ：

$$\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \ge z_\alpha$$

由 $\sqrt{n} \ge (z_\alpha+z_\beta)\sigma/\delta = 2z_{0.05}\cdot 0.3/0.09=10.97$

取 $n = 121$

$$\overline{X} \geq \mu_0 + z_{0.05}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0.11 + 1.645\frac{0.3}{\sqrt{121}} \approx 0.1549$$

$\therefore$ 可安排容量为121的一次性抽样.

当样本均值 $\bar{x} \geq 0.1549$ 时, 客户拒绝购买该批产品; 当 $\bar{x} < 0.1549$ 时, 则购买该批产品.

例8 袋装味精由自动生产线包装，每袋标准重量 500g, 标准差为25g. 质检员在同一天生产的味精中任抽 100袋检验，平均袋重495g.

① 在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下，该天的产品能否投放市场?

② 在①的检验中犯取伪错误的概率 β 是多少?

③ 若同时控制犯两类错误的概率，使 α, β 都小于5 %, 样本容量 $n = ?$

解 ① 设每袋重量 $X \sim N(500,\ 25^2)$

$$H_0: \mu = 500; \quad H_1: \mu \neq 500$$

$\mathfrak{R}$: $|U| = \left| \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \right| \geq z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.025} = 1.96$

$|U_0| = \left| \dfrac{495 - 500}{25 / \sqrt{100}} \right| = 2 > 1.96$ 落在 $\mathfrak{R}_0$ 内

故该天的产品不能投放市场.

② $\delta = \left|\mu - \mu_0\right| = \left|\bar{x} - \mu_0\right| = \left|495 - 500\right| = 5$

$$\lambda = \frac{\delta}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{5}{25/\sqrt{100}} = 2 \qquad z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$$

由P.256第5行公式

$$\beta = \Phi(z_{\frac{\alpha}{2}} - \lambda) + \Phi(z_{\frac{\alpha}{2}} + \lambda) - 1$$

$$= \Phi(-0.04) + \Phi(3.96) - 1$$

$$\approx 1 - \Phi(0.04) = 0.484$$

此概率表明：有48.4%的可能性将包装不合格的认为是合格的.

③ 由于是双边检验，故

$$\sqrt{n} \geq (z_{\frac{\alpha}{2}} + z_{\beta})\sigma/\delta$$

$$= \frac{1.96+1.645}{5} \cdot 25 = 18.025$$

$$\Rightarrow n = 325$$

所以当样本容量取325时，犯两类错误的概率都不超过5 %．

作业 P.264 习题八

3　4　6　9

10　14　21　24