初等模型

- 雨中行走问题
- 席位分配问题
- 双层玻璃的功效问题
- 观众厅的地面设计
- 棋子颜色问题
- 生小兔问题
- 量纲分析法

一 雨中行走问题

一个雨天，你有件急事需要从家中到学校去，学校离家不远，仅一公里，况且事情紧急，你来不及花时间去翻找雨具，决定碰一下运气，顶着雨去学校。假设刚刚出发雨就大了，但你不打算再回去了，一路上，你将被大雨淋湿。一个似乎很简单的事情是你应该在雨中尽可能地快走，以减少雨淋的时间。但如果考虑到降雨方向的变化，在全部距离上尽力地快跑不一定是最好的策略。试建立数学模型来探讨如何在雨中行走才能减少淋雨的程度。

1 建模准备

建模目标：在给定的降雨条件下，设计一个雨中行走的策略，使得你被雨水淋湿的程度最小。

主要因素：

淋雨量， 降雨的大小，降雨的方向（风），路程的远近，行走的速度

2 模型假设及符号说明

1）把人体视为长方体，身高 h 米，宽度 w 米，厚度 d 米。

淋雨总量用 C 升来记。

2）降雨大小用降雨强度 I 厘米/时来描述，降雨强度指单位时间平面上的降下水的厚度。在这里可视其为一常量。

3）风速保持不变。4）你一定常的速度 v 米/秒跑完全程 D 米。

3 模型建立与计算

1）不考虑雨的方向，此时，你的前后左右和上方都将淋雨。

淋雨的面积 $S = 2wh + 2dh + wd \quad (\text{米}^2)$

雨中行走的时间 $t = \dfrac{D}{v}(\text{秒})$

降雨强度 $I(\text{厘米/时}) = 0.01I(\text{米/时}) = (0.01/3600)I(m/s)$

$C = t \times (I/3600) \times 0.01 \times S(\text{米}^3) = 10(D/v) \times I/3600 \times S$（升）

模型中 D, I, S 为参数，而 v 为变量。

结论，淋雨量与速度成反比。这也验证了尽可能快跑能减少淋雨量。

若取参数$D=1000$米,$I=2$厘米/小时,

$h=1.50$米,$w=0.50$米,$d=0.20$米,即$S=2.2$米^2。

你在雨中行走的最大速度$v=6$米/每秒，则计算得
你在雨中行走了167秒，即2分47秒。

从而可以计算被淋的雨水的总量为2.041（升）。

经仔细分析，可知你在雨中只跑了2分47 秒，但被淋了2 升的雨水，大约有4 酒瓶的水量。这是不可思议的。

表明：用此模型描述雨中行走的淋雨量不符合实际。

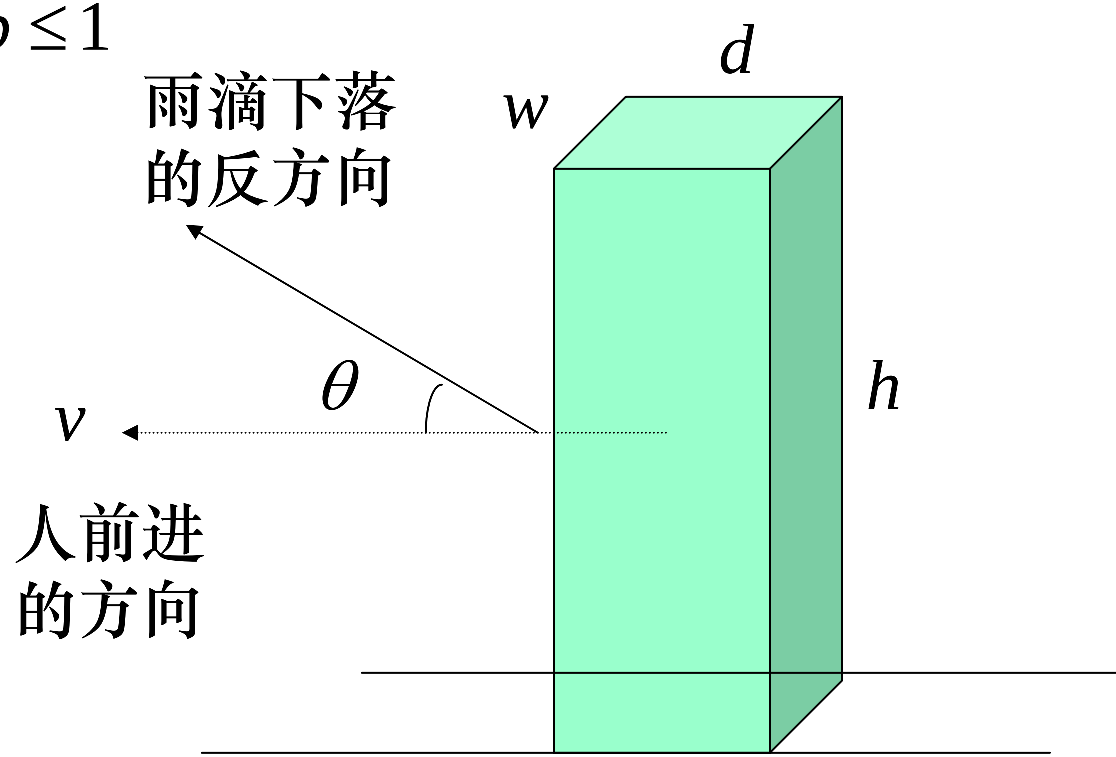
原因：不考虑降雨的方向的假设， 使问题过于简化。

2）考虑降雨方向。

若记雨滴下落速度为 r（米/秒）

雨滴的密度为 p， $p \leq 1$

表示在一定的时刻在单位体积的空间内，由雨滴所占的空间的比例数，也称为降雨强度系数。



所以， $I = rp$

因为考虑了降雨的方向，淋湿的部位只有顶部和前面。分两部分计算淋雨量。

- **顶部的淋雨量**

$$C_1 = (D/v)wd(pr\sin\theta)$$

D/v表示在雨中行走的时间,wd表示顶部面积，$r\sin\theta$表示雨滴垂直下落的速度。

- **前表面淋雨量**

$$C_2 = (D/v)wh[p(r\cos\theta + v)]$$

- **总淋雨量（基本模型）**

$$C = C_1 + C_2 = \frac{pwD}{v}(dr\sin\theta + h(r\cos\theta + v))$$

取参数$r = 4m/s, I = 3600 \times 2cm/s, p = 1.39 \times 10^{-6}$

$$C=\frac{6.95\times10^{-4}}{v}(0.8\sin\theta+6\cos\theta+1.5v)$$

可以看出：淋雨量与降雨的方向和行走的速度有关。

问题转化为给定 θ，如何选择 v 使得 C 最小。

情形1　$\theta=90^\circ$

$$C=6.95\times10^{-4}(\frac{0.8}{v}+1.5)$$

结果表明：淋雨量是速度的减函数，当速度尽可能大时淋雨量达到最小。

假设你以6米/秒的速度在雨中猛跑，则计算得

$$C = 11.3 \times 10^{-4} m^3 = 1.13\text{升}$$

情形2 $\theta = 60^\circ$

$$C = 6.95 \times 10^{-4}[1.5 + (0.4\sqrt{3} + 3)/v]$$

结果表明：淋雨量是速度的减函数，当速度尽可能大时淋雨量达到最小。

假设你以6米/秒的速度在雨中猛跑，则计算得

$$C = 14.7 \times 10^{-4} m^3 = 1.47\text{升}$$

情形3 $90^\circ < \theta < 180^\circ$

此时，雨滴将从后面向你身上落下。

$$C = 6.95 \times 10^{-4}[(0.8\sin\theta + 6\cos\theta)/v + 1.5]$$

令$\theta = \alpha\ +90^{\circ}$，则$0 < \alpha < 90^{\circ}$。

$$C = 6.95\times10^{-4}[(0.8\sin(90^{\circ}+\alpha)+6\cos(90^{\circ}+\alpha))/v+1.5]$$
$$C = 6.95\times10^{-4}[(0.8\cos\alpha-6\sin\alpha)/v+1.5]$$

当$\alpha\ 0^{\circ}\to 90^{\circ}$时，$C$可能取负值，这是不可能的。

出现这个矛盾的原因：我们给出的基本模型是针对雨从你的前面落到身上情形。

因此，对于这种情况要另行讨论。

- **当行走速度慢于雨滴的水平运动速度，即** $v \le r\sin\alpha$

这时，雨滴将淋在背上，而淋在背上的雨水量是

$$pwDh(r\sin\alpha - v)/v$$

淋雨总量为

$$C = pwD[dr\cos\alpha + h(r\sin\alpha - v)]/v$$

当$v=r\sin\alpha$时，C取到最小值。$C=\dfrac{D}{r\sin\alpha}wdpr\cos\alpha$

再次代如数据，得

$$C=6.95\times10^{-4}(0.8\cos\alpha)/(4\sin\alpha)$$

结果表明：当行走速度等于雨滴下落的水平速度时，淋雨量最小，仅仅被头顶上的雨水淋湿了。

若雨滴是以120° **的角度落下，即雨滴以** $\alpha=30^\circ$ **的角从背后落下，你应该以**$v=4\sin30^\circ=2m/s$的速度行走，

此时，淋雨总量为

$$C=6.95\times10^{-4}(0.8\sqrt{3}/2)/2m^3=0.24\text{升}$$

这意味着你刚好跟着雨滴前进，前后都没淋雨。

- 当行走速度快于雨滴的水平运动速度，即 $v > r\sin\alpha$

你不断地追赶雨滴，雨水将淋湿你的前胸。被淋得雨量是

$$pwDh(v - r\sin\alpha)/v$$

淋雨总量为 $C = pwD[dr\cos\alpha + h(v - r\sin\alpha)]/v$

$$C = pwDr[(d\cos\alpha - r\sin\alpha)/v + h/r]$$

当$d\cos\alpha - r\sin\alpha > 0, v$尽可能大，$C$才可能小。

当$d\cos\alpha - r\sin\alpha < 0, v$尽可能小，$C$才可能小。

而$v > r\sin\alpha$，所以$v \to r\sin\alpha$，C 才可能小。

取$v = 6m/s, \alpha = 30^\circ$时，

$C = 6.95\times 10^{-4}(0.4\sqrt{3} + 6)/6m^3 = 0.77$升。

4 结论

若雨是迎着你前进的方向向你落下，这时的策略很简单，应以最大的速度向前跑；

若雨是从你的背后落下，你应控制你在雨中的行走速度，让它刚好等于落雨速度的水平分量。

5 注意

•关于模型的检验，请大家观察、体会并验证。

•雨中行走问题的建模过程又一次使我们看到模型假设的重要性，模型的阶段适应性。

二 席位分配问题

某校有200名学生，甲系100名，乙系60名，丙系40名，若学生代表会议设20个席位，问三系各有多少个席位?

1 问题的提出

按惯例分配席位方案，即按人数比例分配原则

$$m = q \times \frac{p}{N}$$

m 表示某单位的席位数

p 表示某单位的人数

N 表示总人数

q 表示总席位数

20个席位的分配结果

系别	人数	所占比例	分配方案	席位数
甲	**100**	**100/200**	**(50/100)•20=10**	**10**
乙	**60**	**60/200**	**(30/100)•20=6**	**6**
丙	**40**	**40/200**	**(20/100)•20=4**	**4**

现丙系有6名学生分别转到甲、乙系各3名。

系别	人数	所占比例	分配方案	席位数
甲	**103**	**103/200=51.5%**	**51.5 %•20 =10.3**	**10**
乙	**63**	**63/200=31.5%**	**31.5%•20=6.3**	**6**
丙	**34**	**34/200=17.0%**	**17.0%•20=3.4**	**4**

现象1 丙系虽少了6人，但席位仍为4个。（不公平！）

为了在表决提案时可能出现10：10的平局，再设一个席位。

21个席位的分配结果

系别	人数	所占比例	分配方案	席位数
甲	**103**	**103/200=51.5%**	**51.5 %•21 =10.815**	**11**
乙	**63**	**63/200=31.5%**	**31.5%•21=6.615**	**7**
丙	**34**	**34/200=17.0%**	**17.0%•21=3.570**	**3**

现象2 总席位增加一席，丙系反而减少一席。（不公平！）

惯例分配方法：按比例分配完取整数的名额后，剩下的名额按惯例分给小数部分较大者。

存在不公平现象，能否给出更公平的分配席位的方案？

2 建模分析

目标：建立公平的分配方案。

反映公平分配的数量指标可用每席位代表的人数来衡量。

系别	人数	席位数	每席位代表的人数
甲	100	10	100/10=10
乙	60	6	60/6=10
丙	40	4	40/4=10

系别	人数	席位数	每席位代表的人数	公平程度
甲	103	10	103/10=10.3	中
乙	63	6	63/6=10.5	差
丙	34	4	34/4=8.5	好

系别	人数	席位数	每席位代表的人数	公平程度
甲	103	11	103/11=9.36	中
乙	63	7	63/7=9	好
丙	34	3	34/3=11.33	差

一般地，

单位	人数	席位数	每席位代表的人数
A	p_1	n_1	p_1/n_1
B	p_2	n_2	p_2/n_2

当

$$\frac{p_1}{n_1}=\frac{p_2}{n_2}$$

席位分配公平

但通常不一定相等，席位分配的不公平程度用以下标准来判断。

1) $\left|\frac{p_1}{n_1}-\frac{p_2}{n_2}\right|$ 称为“绝对不公平”标准。

此值越小分配越趋于公平，但这并不是一个好的衡量标准。

单位	人数p	席位数n	每席位代表的人数	绝对不公平标准
A	120	10	12	12-10=2
B	100	10	10	
C	1020	10	102	102-100=2
D	1000	10	100	

C,D的不公平程度大为改善！

2） 相对不公平

$\frac{p}{n}$ 表示每个席位代表的人数，总人数一定时，此值越大，代表的人数就越多，分配的席位就越少。

$\frac{p_1}{n_1} > \frac{p_2}{n_2}$ 则A吃亏,或对A 是不公平的。

定义“相对不公平”

若 $\frac{p_1}{n_1} > \frac{p_2}{n_2}$, 则称

$$r_A(n_1, n_2) = \frac{p_1/n_1 - p_2/n_2}{p_2/n_2} = \frac{p_1 n_2}{p_2 n_1} - 1$$

对A 的相对不公平值；

同理，可定义对B 的相对不公平值为：

若 $\frac{p_1}{n_1} < \frac{p_2}{n_2}$，则称

$$r_B(n_1, n_2) = \frac{p_2/n_2 - p_1/n_1}{p_1/n_1} = \frac{p_2 n_1}{p_1 n_2} - 1$$

对B 的相对不公平值；

建立了衡量分配不公平程度的数量指标 r_A, r_B

制定席位分配方案的原则是使它们的尽可能的小。

3 建模

若A、B两方已占有席位数为 n_1, n_2，用相对不公平值讨论当席位增加1 个时，应该给A 还是B 方。

不失一般性， 若 $\frac{p_1}{n_1} > \frac{p_2}{n_2}$， 有下面三种情形。

情形1 $\dfrac{p_1}{n_1+1} > \dfrac{p_2}{n_2},$ 说明即使给A 单位增加1席，仍对A 不公平，所增这一席必须给A单位。

情形2 $\dfrac{p_1}{n_1+1} < \dfrac{p_2}{n_2},$ 说明当对A 不公平时，给A 单位增加1席，对B 又不公平。

计算对B 的相对不公平值

$$r_B(n_1+1, n_2) = \frac{p_2/n_2 - p_1/(n_1+1)}{p_1/(n_1+1)} = \frac{p_2(n_1+1)}{p_1 n_2} - 1$$

情形3 $\dfrac{p_1}{n_1} > \dfrac{p_2}{n_2+1},$ 说明当对A 不公平时，给B 单位增加1席，对A 不公平。

计算对A 的相对不公平值

$$r_A(n_1, n_2+1) = \frac{p_1/n_1 - p_2/(n_2+1)}{p_2/(n_2+1)} = \frac{p_1(n_2+1)}{p_2 n_1} - 1$$

若$r_B(n_1+1,n_2)<r_A(n_1,n_2+1)$,

则这一席位给A 单位，否则给B 单位。

$$r_B(n_1+1,n_2)=\frac{p_2(n_1+1)}{p_1n_2}-1 \qquad r_A(n_1,n_2+1)=\frac{p_1(n_2+1)}{p_2n_1}-1$$

$$\frac{p_2(n_1+1)}{p_1n_2}<\frac{p_1(n_2+1)}{p_2n_1}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{p_2^2}{n_2(n_2+1)}<\frac{p_1^2}{n_1(n_1+1)} \qquad (*)$$

结论：当（*）成立时，增加的一个席位应分配给A 单位，反之，应分配给 B 单位。

若A、B两方已占有席位数为 n_1, n_2，

记 $$Q_i = \frac{p_i^2}{n_i(n_i+1)} \quad i = 1,2$$

则增加的一个席位应分配给Q值 较大的一方。

这样的分配席位的方法称为Q值方法。

4 推广 有m 方分配席位的情况

设A_i 方人数为p_i ，已占有n_i个席位，$i = 1,2,\cdots,m$

当总席位增加1 席时，计算

$$Q_i = \frac{p_i^2}{n_i(n_i+1)} \quad i = 1,2,\cdots,m$$

则1 席应分给Q值最大的一方。从$n_i = 1$ 开始，即每方至少应得到以1 席，（如果有一方1 席也分不到，则把它排除在外。）

5 举例

甲、乙、丙三系各有人数103，63，34，有21个席位，如何分配?

$$Q_i = \frac{p_i^2}{n_i(n_i+1)} \quad i = 1,2,3$$

按**Q**值方法：

$$n_1 = 1, n_2 = 1, n_3 = 1$$

$$Q_1 = \frac{103^2}{1(1+1)} = 5304.5, \qquad Q_1 = \frac{103^2}{2(2+1)} = 1768.2$$

$$Q_2 = \frac{63^2}{1(1+1)} = 1984.5, \qquad Q_2 = \frac{63^2}{1(1+1)} = 1984.5,$$

$$Q_3 = \frac{34^2}{1(1+1)} = 578 \qquad Q_3 = \frac{34^2}{1(1+1)} = 578$$

$$Q_1 = \frac{103^2}{2(2+1)} = 1768.2 \qquad Q_1 = \frac{103^2}{3(3+1)} = 888.4$$

$$Q_2 = \frac{63^2}{2(2+1)} = 661.5 \qquad Q_2 = \frac{63^2}{2(2+1)} = 661.5$$

$$Q_3 = \frac{34^2}{1(1+1)} = 578 \qquad Q_3 = \frac{34^2}{1(1+1)} = 578$$

甲	1	4	6	7	10	11	13	16	17	19	20
乙	1	5	8	12	14	18					
丙	1	9	15	21							

甲：11，乙：6，丙：4

练习

学校共1000学生，235人住在A楼，333人住在B楼，432住在C楼。学生要组织一个10人委员会，试用惯例分配方法， d’Hondt方法和Q值方法分配各楼的委员数，并比较结果。

d’Hondt方法

有k个单位，每单位的人数为 p_i，总席位数为n。

做法：

用自然数1,2,3,…分别除以每单位的人数，从所得的数中由大到小取前 n 个，（这n 个数来自各个单位人数用自然数相除的结果），这n个数中哪个单位有几个所分席位就为几个。