线性代数模型

有些复杂问题，往往给人以变幻莫测的感觉，难以掌握其中的奥妙。当我们把思维扩展到线性空间，利用线性代数的基本知识建立模型，就可以掌握事物的内在规律，预测其发展趋势。

Durer 魔方

德国著名的艺术家 Albrecht Durer (1471--1521)于1514年曾铸造了一枚名为“Melen cotia I”的铜币。令人奇怪的是在这枚铜币的画面上充满了数学符号、数学数字和几何图形。这里我们仅研究铜币右上角的数字问题。

1 Durer 魔方

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

特点

每行之和、每列之和、对角线之和、四个小方块之和、中心方块之和都相等，为确定的数34。

四角之和、中间对边之和均为34。

所出现的数是1至16的自然数。

最下边一行中心数为1514，正是制币的时间。

问题 是否还存在具有这些（或部分）性质的魔方?

10	80	100	150
140	110	50	40
70	20	160	90
120	130	30	60

0	6	1	18
9	10	6	0
15	0	9	1
1	9	9	6

0	7	1	18
9	10	7	0
16	0	9	1
1	9	9	7

定义

如果4×4数字方，它的每一行、每一列、每一对角线及每个小方块上的数字之和都为一确定的数，则称这个数字方为 **Durer 魔方**。

R=C=D=S

你想构造Durer魔方吗?

如何构成所有的Durer魔方? Durer魔方有多少?

2 Durer魔方的生成集

所有的Durer魔方的集合为 **D**

O=

0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0

R=C=D=S=0

E=

1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	1	1

R=C=D=S=4

$$A=\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ \hline a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ \hline \end{array} \qquad B=\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ \hline b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ \hline b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ \hline b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \\ \hline \end{array}$$

类似于矩阵的加法和数乘，定义魔方的加法和数乘。

易验证，**D** 加法和数乘封闭，且构成一线性空间。

记 **M** ={所有的4×4数字方}，则其维数为16。

而**D**是**M**的子集，则**D**是有限维的线性空间。

根据线性空间的性质，如果能得到**D**的一组基，

则任一个Durer方均可由这组基线性表示。

由 0,1 数字组合，构造所有的**R=C=D=S=1**的魔方。共有8 个，记为Q_i， i=1,2,…,8。

Q_1=

1	0	0	0
0	0	1	0
0	0	0	1
0	1	0	0

Q_2=

1	0	0	0
0	0	0	1
0	1	0	0
0	0	1	0

Q_3=

0	0	0	1
1	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0

Q_4=

0	0	0	1
0	1	0	0
1	0	0	0
0	0	1	0

$$Q_5=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} \qquad Q_6=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$Q_7=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{bmatrix} \qquad Q_8=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}$$

易知 $Q_1+Q_4+Q_5+Q_8-Q_2-Q_3-Q_6-Q_7=0$

则 $Q_1,Q_2,\cdots,Q_8$ 线性相关。

而由 $r_1Q_1+r_2Q_2+r_3Q_3+r_4Q_4+r_5Q_5+r_6Q_6+r_7Q_7=0$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline r_1+r_2 & r_6 & r_5+r_7 & r_3+r_4 \\ \hline r_3+r_5 & r_4+r_7 & r_1+r_6 & r_2 \\ \hline r_4+r_6 & r_2+r_5 & r_3 & r_1+r_7 \\ \hline r_7 & r_1+r_3 & r_2+r_4 & r_5+r_6 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$r_1=r_2=r_3=r_4=r_5=r_6=r_7=0$

$Q_1,Q_2,\cdots,Q_7$ 线性无关。任一Durer方可由它们线性表示。

结论： 1 Durer方有无穷多个。

2 Durer方可由 $\{Q_1, Q_2, \cdots, Q_7\}$ 线性组合得到。

Albrecht Durer的数字方的构成：

$$D = r_1Q_1 + r_2Q_2 + r_3Q_3 + r_4Q_4 + r_5Q_5 + r_6Q_6 + r_7Q_7$$

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

=

r_1+r_2	r_6	r_5+r_7	r_3+r_4
r_3+r_5	r_4+r_7	r_1+r_6	r_2
r_4+r_6	r_2+r_5	r_3	r_1+r_7
r_7	r_1+r_3	r_2+r_4	r_5+r_6

$$r_1 = 8, r_2 = 8, r_3 = 7, r_4 = 6, r_5 = -3, r_6 = 3, r_7 = 4$$

$$D = 8Q_1 + 8_2 Q_2 + 7Q_3 + 6Q_4 - 3_5 Q_5 + 3Q_6 + 4Q_7$$

3 Durer方的应用推广

（1）要求数字方的所有数字都相等。

$G = \left\{ rE, r \in R \right\}$ 基为 $\left\{ E \right\}$ 1维空间

（2）要求行和、列和、每条主对角线及付对角线数字和都相等。 B 5维空间

基为

$$P_1 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad P_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad P_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

例

$$P = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 17 & 2 & 11 & 16 \\ \hline 16 & 11 & 22 & -3 \\ \hline 12 & 7 & 6 & 21 \\ \hline 1 & 26 & 7 & 12 \\ \hline\end{array}$$

R=C=H=N=46

H 主对角线，N付对角线数字和。

（3）要求行和、列和及两条对角线数字和相等。

8维空间Q。

基为$\{Q_1, Q_2, \cdots, Q_7, N_0\}$

$$N_0 = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0 & 1 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 1 & 0 \\ \hline\end{array}$$

D是Q的7维子空间。

例

$P =$

6	7	9	8
12	6	5	7
5	10	9	6
7	7	7	9

R=C=D=30

（4）要求行和、列和数字相等。　　10维空间W。

基为 $\{Q_1, Q_2, \cdots, Q_7, N_1, N_2, N_3\}$

$N_1 =$

0	0	0	0
1	0	0	-1
-1	0	0	1
0	0	0	0

$N_2 =$

0	1	0	-1
1	0	-1	0
-1	0	0	1
0	-1	1	0

$N_3 =$

0	1	0	0
1	0	0	0
0	0	0	1
0	0	1	0

（5）对数字没有任何要求的数字方　　16维空间M

空间	$\{0\}\subseteq$	$G \subseteq$	$B \subseteq$	$D \subseteq$	$Q \subseteq$	$W \subseteq$	M
维数	0	1	5	7	8	10	16

思考

能否构造出其他维数的数字方?

练习 完成下面的Durer方

6	7	9	8
	5		
		9	
		7	

R=C=D=S=30

6			
		14	
9		48	
8	7		11

R=C=D=S=100

作业

构造你自己认为有意义的Durer方。

6	7	9	8
12	5	5	8
6	11	9	4
6	7	7	10

植物基因的分布

设一农业研究所植物园中某植物的的基因型为AA、Aa 和 aa 。研究所计划采用AA型的植物与每一种基因型植物相结合的方案培育植物后代。问经过若干年后，这种植物的任意一代的三种基因型分布如何?

1 建模准备

植物遗传规律?

动植物都会将本身的特征遗传给后代，这主要是因为后代继承了双亲的基因，形成了自己的基因对，基因对就确定了后代所表现的特征。

常染色体遗传的规律:

后代是从每个亲体的基因对中个继承一个基因，形成自己的基因对，即基因型。

如果考虑的遗传特征是由两个基因 A、a控制的，那末就有三种基因对，记为AA、Aa 和 aa 。

如

金鱼草花的颜色是由两个遗传因 子决定的，基因型为AA的金鱼草开红花，Aa 型的开粉红花，而 aa型的开白花。

人类眼睛的颜色也是通过常染色体来控制的。基因型为AA ，或Aa 型的人眼睛颜色为棕色，而 aa型的人眼睛颜色为蓝色。

这里AA ，Aa表示同一外部特征，我们认为基因A支配基因a，即基因a对A来说是隐性的。

双亲体结合形成后代的基因型概率矩阵

		父体-母体的基因对					
		AA-AA	AA-Aa	AA-aa	Aa-Aa	Aa-aa	aa-aa
后代基因对	AA	1	1/2	0	1/4	0	0
	Aa	0	1/2	1	1/2	1/2	0
	aa	0	0	0	1/4	1/2	1

2 假设

假设1

a_n, b_n, c_n 分别表示第n代植物中基因型为AA,Aa,aa的植物占植物总数的百分率。

$$a_n + b_n + c_n = 1$$

第n代植物的基因型分布为 $x^{(n)} = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix},$

$x^{(0)} = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix},$ 表示植物基因型初始分布。

假设2　植物中第n-1代基因型分布与第n代分布的关系由上表确定。

3 建模

$$a_n = a_{n-1} + \frac{1}{2} b_{n-1}$$

$$b_n = \frac{1}{2} b_{n-1} + c_{n-1}$$

$$c_n = 0$$

$$a_n + b_n + c_n = 1$$

		父体-母体的基因对 AA-AA	AA-Aa	AA-aa
后代基因对	AA	1	1/2	0
	Aa	0	1/2	1
	aa	0	0	0

$$a_n = a_{n-1} + \frac{1}{2} b_{n-1}$$

$$b_n = \frac{1}{2} b_{n-1} + c_{n-1}$$

$$c_n = 0$$

$$a_n + b_n + c_n = 1$$

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \\ c_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x^{(n)} = Mx^{(n-1)}$$

$$x^{(n)} = Mx^{(n-1)} = M^2 x^{(n-2)} = M^3 x^{(n-3)} = \cdots = M^n x^0$$

4 求解模型

$$x^{(n)} = M^n x^0$$

关键计算 M^n

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

特征值为1，1/2，0，M可对角化，即可求出可逆对角矩阵P，使PMP^{-1}为对角型矩阵。

特征值为1，1/2，0的特征向量分别为

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

则

$$P=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\qquad D=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1/2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$x^{(n)}=M^n x^0=PD^nP^{-1}x^0$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & (1/2)^n & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^{-1} x^0$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & (1/2)^n & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^{-1} x^0$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 1-(1/2^n) & 1-(1/2^{n-1})\\ 0 & 1/2^n & 1/2^{n-1}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} x^0$$

$$=\begin{pmatrix}a_0+b_0+c_0-(1/2^n)b_0-(1/2^{n-1})c_0\\ (1/2^n)b_0+(1/2^{n-1})c_0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1-(1/2^n)b_0-(1/2^{n-1})c_0\\ (1/2^n)b_0+(1/2^{n-1})c_0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$x^{(n)} = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-(1/2^n)b_0-(1/2^{n-1})c_0 \\ (1/2^n)b_0+(1/2^{n-1})c_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

当$n \to \infty$ 时， $a_n \to 1, b_n \to 0, b_n \to 0$

5 结论

经过足够长的时间后，培育出来的植物基本上呈现AA型。