优化模型

- 优化模型的一般意义
- 存贮模型
- 生猪的出售时机
- 森林救火问题
- 线性规划模型举例

一 优化模型的一般意义

（一）优化模型的数学描述

将一个优化问题用数学式子来描述，即求函数

$$u = f(x) \qquad x = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$$

在约束条件 $h_i(x) = 0, i = 1,2,\ldots,m.$

和 $g_i(x) \le 0 (g_i(x) \ge 0), i = 1,2,\ldots,p.$

下的最大值或最小值，其中

$x \longrightarrow$ 设计变量（决策变量）

$f(x) \longrightarrow$ 目标函数

$x \in \Omega \longrightarrow$ 可行域

$$\min(or\ \ \max)\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \quad \boldsymbol{x} \in \Omega$$

$$s.\ t.\quad h_i(\boldsymbol{x}) = 0, i = 1,2,\ldots, m.$$

$$g_i(\boldsymbol{x}) \le 0 (g_i(\boldsymbol{x}) \ge 0), i = 1,2,\ldots, p.$$

s. t. *subject to* “受约束于”之意

（二）优化模型的分类

1.根据是否存在约束条件

有约束问题和无约束问题。

2.根据设计变量的性质

静态问题和动态问题。

3.根据目标函数和约束条件表达式的性质

线性规划，非线性规划，二次规划，多目标规划等。

（1）非线性规划

目标函数和约束条件中，至少有一个非线性函数。

$$\min \boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \quad \boldsymbol{x} \in \Omega$$

$$s.\ t.\quad h_i(\boldsymbol{x}) = 0, i = 1,2,\ldots,m.$$

$$g_i(\boldsymbol{x}) \le 0 (g_i(\boldsymbol{x}) \ge 0), i = 1,2,\ldots,p.$$

（2）线性规划（LP）

目标函数和所有的约束条件都是设计变量的线性函数。

$$\min u = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

$$s.t.\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k = b_i, i = 1,2,\ldots, n. \\ x_i \geq 0, i = 1,2,\ldots, n. \end{cases}$$

（3）二次规划问题

目标函数为二次函数，约束条件为线性约束

$$\min u = f(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} x_i x_j$$

$$s.t.\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, i = 1,2,\ldots, n. \\ x_i \ge 0. i = 1,2,\ldots, n. \end{cases}$$

4. 根据设计变量的允许值

整数规划（0-1规划）和实数规划。

5. 根据变量具有确定值还是随机值

确定规划和随机规划。

（三）建立优化模型的一般步骤

1.确定设计变量和目标变量；

2.确定目标函数的表达式；

3.寻找约束条件。

（四）简单优化模型举例

例1 存贮模型

工厂定期订购原料，存入仓库供生产之用；

车间一次加工出一批零件，供装配线每天生产之用；

商店成批购进各种商品，放在货柜里以备零售；

水库在雨季蓄水，用于旱季的灌溉和发电。

存贮量多少合适?

存贮量过大，存贮费用太高；存贮量太小，会导致一次性订购费用增加，或不能及时满足需求。

问题1 不允许缺货的存贮模型

配件厂为装配线生产若干种部件，轮换生产不同的部件时因更换设备要付生产准备费（与生产数量无关），同一部件的产量大于需求时因积压资金、占用仓库要付存贮费。今已知某一部件的日需求量100件，生产准备费5000元，存贮费每日每件1元。如果生产能力远大于需求，并且不允许出现缺货，试安排该产品的生产计划，即多少天生产一次（称为生产周期），每次产量多少，可使总费用最小。

问题分析

若每天生产一次，每次100件，无存贮费，生产准备费5000元，每天费用5000元；

若10天生产一次，每次1000件，存贮费900+800+…+100=4500元，生产准备费5000元，总计9500元，平均每天费用950元；

若50天生产一次，每次5000件，存贮费4900+4800+…+100=122500元，生产准备费5000元，总计127500元，平均每天费用2550元；

寻找生产周期、产量、需求量、生产准备费和存贮费之间的关系，使每天的费用最少。

模型假设

1 连续化，即设生产周期 T 和产量 Q 均为连续量；

2 产品每日的需求量为常数 r；

3 每次生产准备费 C_1，每日每件产品存贮费 C_2；

4 生产能力为无限大（相对于需求量），当存贮量降到零时，Q件产品立即生产出来供给需求，即不允许缺货。

模型建立

总费用与变量的关系

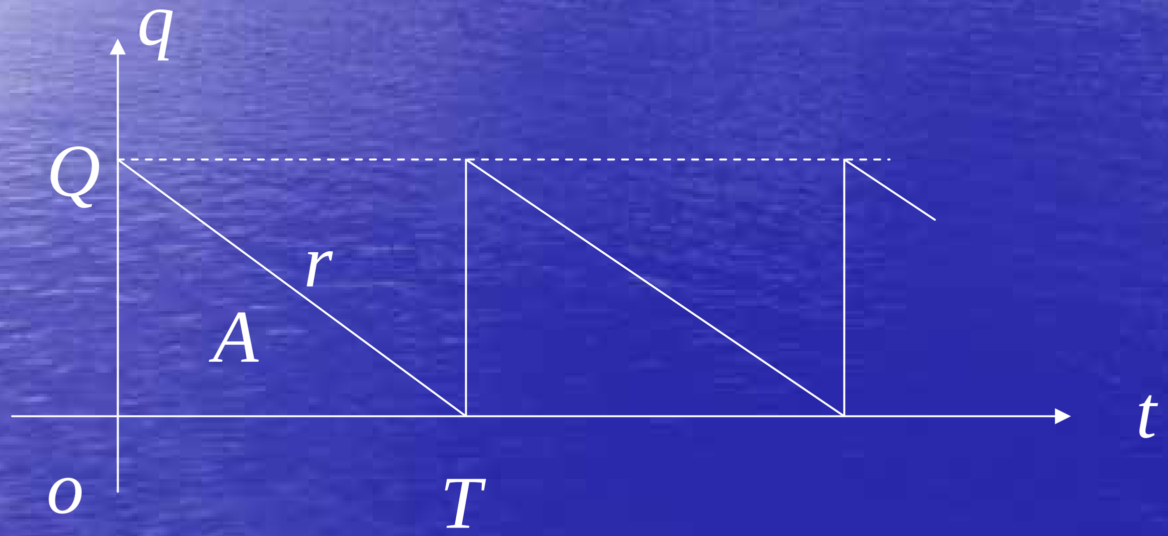
总费用=生产准备费+存贮费

存贮费=存贮单价*存贮量

存贮量=?

存贮量的计算

设 t 时刻的存贮量为 $q(t)$，$t = 0$时生产 Q 件，存贮量 $q(0) = Q$，$q(t)$ 以需求速率 r 线性递减，直至$q(T) = 0$，如图。$q(t) = Q - r\,t$， $Q = r\,T$ 。



不允许缺货模型的存贮量$q(t)$

一个周期内存贮量 $\int_0^T q(t)dt = \frac{QT}{2}$ (A的面积)

一个周期内存贮费 $c_2\int_0^T q(t)dt$

一个周期的总费用

$$\overline{C} = c_1 + c_2\int_0^T q(t)dt = c_1 + c_2\frac{QT}{2} = c_1 + c_2\frac{rT^2}{2}$$

每天平均费用 $C(T) = \frac{\overline{C}}{T} = \frac{c_1}{T} + c_2\frac{rT}{2}$

模型求解

求T满足 $\min C(T) = \frac{c_1}{T} + c_2 \frac{rT}{2}$

用微分法 $C'(T) = -\frac{c_1}{T^2} + c_2 \frac{r}{2} = 0$

$$T = \sqrt{\frac{2c_1}{c_2 r}} \qquad Q = rT = \sqrt{\frac{2c_1 r}{c_2}}$$

每天平均最小费用 $C = \sqrt{2c_1 c_2 r}$

著名的 经济订货批量公式（EOQ公式）。

结果解释

$$T=\sqrt{\frac{2c_1}{c_2 r}} \qquad Q=rT=\sqrt{\frac{2c_1 r}{c_2}} \qquad C=\sqrt{2c_1c_2r}$$

当准备费 c_1 增加时，生产周期和产量都变大；
当存贮费 c_2 增加时，生产周期和产量都变小；
当日需求费 r 增加时，生产周期变小而产量变大。
这些定性结果符合常识，而定量关系（平方根，系数2 等）凭常识是无法得出的，只能由数学建模得到。

$$T = \sqrt{\frac{2c_1}{c_2 r}} \qquad C = \sqrt{2c_1 c_2 r}$$

在本例中

当 $c_1 = 5000, c_2 = 1, r = 100,$

得 $T = 10,\ \ C = 1000$

这里得到的费用C与前面计算得950元有微小差别，你能解释吗？

敏感性分析

讨论参数 c_1, c_2, r 有微小变化时对生产周期T 影响。

由相对变化量衡量对参数的敏感程度。

T 对c_1 的敏感程度记为 $S(T, c_1)$

$$S(T, c_1) = \frac{\Delta T / T}{\Delta c_1 / c_1} \approx \frac{dT}{dc_1} \frac{c_1}{T} = \frac{1}{2} \frac{\frac{2}{c_2 r}}{\sqrt{\frac{2c_1}{c_2 r}}} \cdot \frac{c_1}{T} = \frac{1}{2}$$

$$S(T, c_2) = -\frac{1}{2} \qquad S(T, r) = -\frac{1}{2}$$

$$S(T,c_1)=\frac{1}{2}\quad S(T,c_2)=-\frac{1}{2}\qquad S(T,r)=-\frac{1}{2}$$

意义是当准备费增加1%时，生产周期增加0.5%；

而存贮费增加1%时，生产周期减少0.5%；

日需求量增加1%时，生产周期减少0.5%。

当 c_1,c_2,r 有微小变化对生产周期影响不太大。

思考

1 建模中未考虑生产费用（这应是最大一笔费用），在什么情况下才可以不考虑它?

2 建模时作了“生产能力无限大”的简化假设，如果生产能力有限，是大于需求量的一个常数，如何建模?

问题2 允许缺货的存贮模型

模型假设

1 连续化，即设生产周期 T 和产量 Q 均为连续量；

2 产品每日的需求量为常数 r；

3 每次生产准备费 C_1，每日每件产品存贮费 C_2；

4 生产能力为无限大（相对于需求量），允许缺货，每天每件产品缺货损失费C_3，但缺货数量需在下次生产（订货）时补足。

模型建立

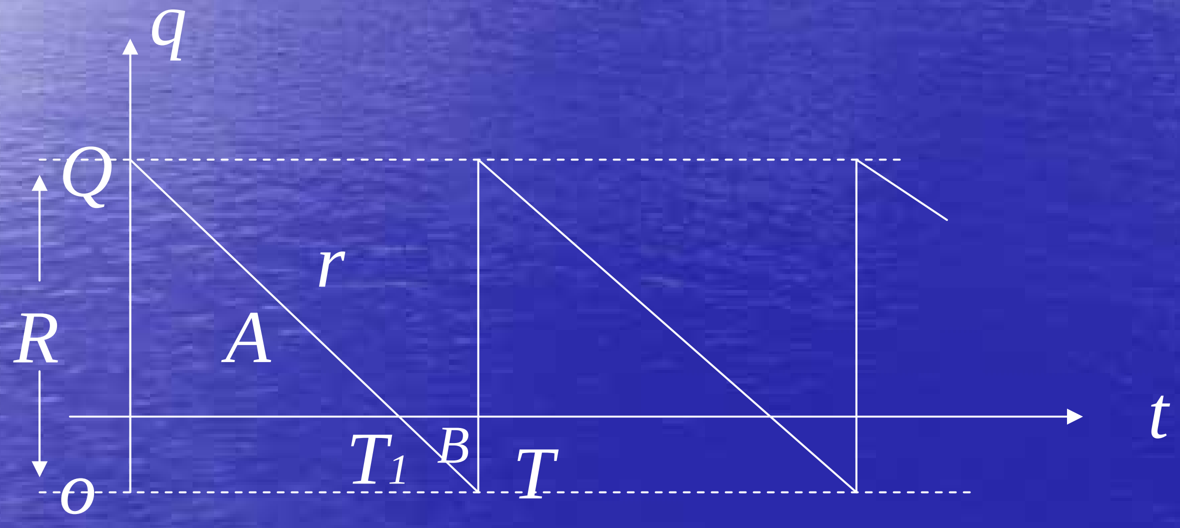
总费用=生产准备费+存贮费+缺货损失费

存贮费=存贮单价*存贮量

缺货损失费=缺货单价*缺货量

存贮量=?，缺货量=?

因存贮量不足造成缺货，因此 $q(t)$ 可取负值，$q(t)$ 以需求速率 r 线性递减，直至$q(T_1) = 0$，如图。$q(t) = Q - r\,t$， $Q = r\,T_1$ 。



允许缺货模型的存贮量$q(t)$

一个周期内存贮费 $c_2\int_0^{T_1} q(t)dt = c_2\dfrac{QT_1}{2} = c_2\dfrac{Q^2}{2r}$

一个周期内缺货损失费 $c_3\int_{T_1}^{T} q(t)dt = c_3\dfrac{(rT-Q)(T-T_1)}{2}$

$= c_3\dfrac{(rT-Q)^2}{2r}$

一个周期的总费用

$$\overline{C} = c_1 + c_2\frac{Q^2}{2r} + c_3\frac{(rT-Q)^2}{2r}$$

每天平均费用 $C(T,Q) = \dfrac{c_1}{T} + c_2\dfrac{Q^2}{2rT} + c_3\dfrac{(rT-Q)^2}{2rT}$

模型求解

求T,Q满足$\min C(T,Q)=\dfrac{c_1}{T}+c_2\dfrac{Q^2}{2rT}+c_3\dfrac{(rT-Q)^2}{2rT}$

用微分法 令 $\dfrac{\partial C(T,Q)}{\partial T}=0,\quad \dfrac{\partial C(T,Q)}{\partial Q}=0$

$$T'=\sqrt{\frac{2c_1}{c_2 r}\cdot\frac{c_2+c_3}{c_3}}\qquad Q'=\sqrt{\frac{2c_1 r}{c_2}\cdot\frac{c_3}{c_2+c_3}}$$

每天平均最小费用 $C=C(T',Q')$

每个周期的供货量 $R = rT'$

$$R = r\sqrt{\frac{2c_1}{c_2 r} \cdot \frac{c_2 + c_3}{c_3}} \qquad \lambda = \frac{c_2 + c_3}{c_3}$$

与不允许缺货模型相比较，有

$$T' = \lambda T, \quad Q' = Q/\lambda, \quad R = \lambda Q$$

结果解释

$$T' = \lambda T, \quad Q' = Q/\lambda, \quad R = \lambda Q \qquad \lambda = \frac{c_2 + c_3}{c_3}$$

1) $\lambda > 1, \ T' > T, \ Q' < Q, \ R > Q$ 即允许缺货时，周期和供货量增加，周期初的存贮量减少。

2）缺货损失费愈大，λ 愈小，T' 愈接近 T ，Q', R 愈接近 Q 。

3）当$c_3 \to \infty$时，$\lambda \to 1, \ T' \to T, \ Q' \to Q, \ R \to Q$

不允许缺货模型可视为允许缺货模型的特例。