量纲分析建模

一、单位与量

1、单位

数学建模的目的是解决实际问题，而实际问题中的量都有相应的单位。数学中纯粹的数在实际问题中不具有明确的含如在实际问题中谈某个长度量，在关注其数值的同时还必须关注其单位，否则，我们便没有把这个量完全弄清楚。但实际问题中的诸多量并非全是相互独立的，其中一些量能起到基本量的作用，其它量是这些基本量的符合某种规律的组合，如速度是长度与时间这两个基本量的一种规定的组合。

如果规定了基本量的单位，其它量的单位也随之确

2、基本物理

定义：一组物理量，若彼此相互独立，且其它物理量均是这些物理量的合乎某种规律的组合，则称这些物理量为基本物理量。

基本量信息表

物理量	量纲	单位	符号
长度	L	米	m
质量	M	千克	kg
时间	T	秒	s
电流强度	I	安培	A
温度	Θ	开尔文	K
光强	J	坎得拉	cd
物质的量	N	摩尔	mol

3、量

定义：一物理量与基本物理量之间的规定关系，称为该量的量纲。这种规定关系常以基本物理量的幂指乘积形式表示，因此也称为量纲积。即任一物理量的量纲皆可表示成

$$Q = L^{\alpha_1} M^{\alpha_2} T^{\alpha_3} I^{\alpha_4} \Theta^{\alpha_5} J^{\alpha_6} N^{\alpha_7}$$

许多物理问题的研究只涉及M, L, T三个基本量纲，我们称这样的问题为MLT系统.

运动问题都是MLT系统.

在MLT系统中，任一物理量的量纲可表示成

$$Q = M^a L^b T^c$$

在MLT系统中各物理量的量纲

质量 M

长度 L

时间 T

速度 LT^{-1}

加速度 LT^{-2}

力 MLT^{-2}

能量、功 ML^2T^{-2}

功率 ML^2T^{-3}

频率 T^{-1}

角速度 T^{-1}

角加速度 T^{-2}

压强 $ML^{-1}T^{-2}$

动量 MLT^{-1}

密度 ML^{-3}

粘性 $ML^{-1}T^{-1}$

比重 $ML^{-2}T^{-2}$

角动量 ML^2T^{-1}

表面张力 MT^{-2}

转动惯量 ML^2

转矩 ML^2T^{-2}

熵 ML^2T^{-2}

热量 ML^2T^{-2}

4、量纲与单位的关系

1）、量纲和单位都在反映物理量的特征，反映该物理量与基本物理量间的关系。

2）、任何物理量的量纲是唯一的，但单位可以有多个。

如速度的量纲是LT^{-1},但其单位可以是(m/s)

也可以是(km/s),还可以是(km/h).

3）、有的量可以没有量纲，但它可能有单位。如角度

4）、物理量的量纲及其相互关系反映了各量之间的内在属性，这是量纲关系能用于建立数学模型的理论基础。

二、量纲齐次性定理

定

设$q_1,q_2,\cdots q_m$是m个物理量，$f(q_1,q_2,\cdots q_m)=0$是与量纲选取无关的物理定律

$X_1,X_2,\cdots X_n(n\le m)$是基本量纲，$q_1,q_2,\cdots q_m$的量纲可表为

$$[q_i]=\prod_{i=1}^{n}X^{\alpha_{ij}}\quad (j=1,2,\cdots m)$$

矩阵$\mathbf{A}=[a_{ij}]_{n\times m}$称为量纲矩阵，其秩为$r$，对$m$维向量$y$，若齐次线性方程组

$Ay=0$的$m-r$个基础解为

$$y_k=(y_{k1},y_{k2},\cdots y_{km})^T\quad (k=1,2,\cdots,m-r)$$

则 $\pi_k=\prod_{j=1}^{m}q_j^{y_{kj}}$为$m-r$个相互独立的无量纲量，且$F(\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_{m-r})=0$与

$f(q_1,q_2,\cdots q_m)=0$等价.

三、建模实例

例子.：建模描述单摆的运动周期

分析及符号：单摆运动是指用细线悬挂的小球离开其平衡位置后在重力的作用下所做的平面往复运动。与运动过程相关的主要因素有：

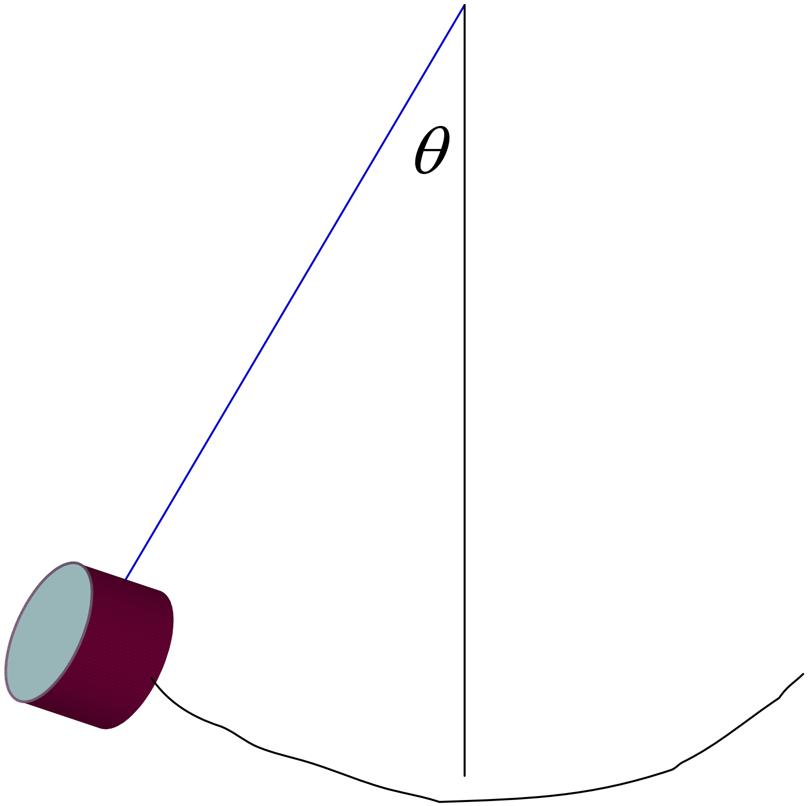
运动周期 t

摆线长度 l

摆球质量 m

重力加速度 g

单摆的振幅 θ



模型假设:

1、小球运动过程中不考虑空气阻力。

2、忽略地球自转对单摆运动的影响。

3、摆线是刚体，在单摆运动过程中不发生形变。

4、忽略摆轴处的摩擦力影响。

建立模型:

我们先找到在问题分析中所提各物理量的量纲，它们分别为:

$$[t]=T,\ [l]=L,\ [m]=M,\ [g]=LT^{-2},\ [\theta]=1.$$

单摆运动的规律必可表示为 $F(t,l,m,g,\theta)=0$

由于等式右端是无量纲量，所以等式左端的项应具有形式

$$t^{\alpha_1}l^{\alpha_2}m^{\alpha_3}g^{\alpha_4}\theta^{\alpha_5}=\pi$$

式中 π 表示无量纲量.

$$[\pi]=T^{\alpha_1}L^{\alpha_2}M^{\alpha_3}(LT^{-2})^{\alpha_4}\theta^{\alpha_5}=T^{\alpha_1-2\alpha_4}L^{\alpha_2+\alpha_4}M^{\alpha_3}\theta^{\alpha_5}=1$$

于是有
$$\begin{cases}\alpha_1-2\alpha_4=0\\ \alpha_2+\alpha_3=0\\ \alpha_3=0\\ \alpha_5=\alpha_5\end{cases}$$

该方程组的基础解系为: $\eta_1=(2,-1,0,1,0)^T$， $\eta_2=(0,0,0,0,1)^T$

于是有模 $\pi_1=t^2l^{-1}g=\dfrac{t^2g}{l}$ $\quad\pi_2=\theta$

即 $F(t,l,m,g,\theta)=0$等价于$f(\pi_1,\pi_2)=0$

若$f(\pi_1,\pi_2)$存在隐函数$\pi_1=k(\pi_2)$,则有$t=\lambda(\theta)\sqrt{l/g}$

若能确定$\lambda(\theta)$，该问题的模型就完全确 定了。

量纲齐次性定理($Buckingham$定理，$\pi-$定理)

方程$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$是量纲齐次的，当且仅当它可表示成

$$f(\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_m)=0$$

其中各$\pi_i \quad i=1,2,\cdots,m$为无量纲常数.

这里各π_i均是各x_i的幂指乘积.

例如：

$$\pi_1 = x_1^{a_{11}} x_2^{a_{12}} \cdots x_n^{a_{1n}}$$

例**2**：描述不可压缩粘性流体在管道内的稳定流动.

假设:1、流体粘性均匀且不可压缩.

2、管道壁与流体间的磨擦力可以不计.

相关因素: 管道长$\boldsymbol{l}$ 流速$\boldsymbol{v}$ 流体的密度ρ

管道两端的压强 $\boldsymbol{p}$ 粘性系数μ 重力加速度 $\boldsymbol{g}$

因素的量纲: $[l]=L$ $[v]=LT^{-1}$ $[\rho]=ML^{-3}$

$[g]=LT^{-2}$ $[\mu]=ML^{-1}T^{-1}$ $[p]=ML^{-1}T^{-2}$

齐次关系:

$$[\pi]=\mathrm{L}^{\alpha_1}(\mathrm{LT}^{-1})^{\alpha_2}(ML^{-3})^{\alpha_3}(ML^{-1}T^{-2})^{\alpha_4}(ML^{-1}T^{-1})^{\alpha_5}(LT^{-2})^{\alpha_6}$$

$$=\mathrm{L}^{\alpha_1+\alpha_2-3\alpha_3-\alpha_4-\alpha_5+\alpha_6}\mathrm{T}^{-\alpha_2-2\alpha_4-\alpha_5-2\alpha_6}M^{\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5}$$

$$=\mathrm{L}^0\mathrm{T}^0M^0$$

由此得一六个未知量的　方程组　其系数矩阵为

$$\begin{cases} \alpha_1+\alpha_2-3\alpha_3-\alpha_4-\alpha_5+\alpha_6=0 \\ \alpha_3+\alpha_4+\alpha_5=0 \\ -\alpha_2-2\alpha_4-\alpha_5-2\alpha_6=0 \end{cases}$$

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

令 $\begin{bmatrix}\alpha_4\\ \alpha_5\\ \alpha_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},$ 得基础解系

$$\vec{e_1}=(0\quad -2\quad -1\quad 1\quad 0\quad 0)^T$$
$$\vec{e_2}=(-1\quad -1\quad -1\quad 0\quad 1\quad 0)^T$$
$$\vec{e_3}=(1\quad -2\quad 0\quad 0\quad 0\quad 1)^T$$

于是与这六个参数有关　的三个无量纲乘积分别　为:

$$\pi_1=v^{-2}\rho^{-1}p,\qquad \pi_2=l^{-1}v^{-1}\rho^{-1}\mu,\qquad \pi_3=lv^{-2}g$$

依据量纲齐次性原理，规律$F(l,v,\rho,p,\mu,g)=0$

等价于$f(\pi_1,\pi_2,\pi_3)=0.$

我们用流动中的压强p表示流动规律的结果变量，

则可等价地写出$\pi_1=h(\pi_2,\pi_3)$,即.　$p=\rho v^2 h(\pi_2,\pi_3).$

量纲分析法建模的工作步骤

一、找出含目标因素在内的各主要相关因素。

二、写出含目标因素在内的各主要相关因素的量纲积。

三、写出含目标因素在内的 各主要相关因素的无量 纲量π_i的量纲表达式 该表达式的指数为待定 常数。

四、利用量纲齐次性原理得到齐次线性方程组，并求基础解系

五、依据各基础解分别写出 各π_i的表达式

六、在$f(\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_k)=0$中解出含有目标因素的 π_i.

必须遵循的两个原则:

1. 因素的选择要紧扣建模的目的，因素的多少要适中.

2. 基础解系的选择要保证只允许结果变量出现在一个π_i中.

烤火鸡

问题：烤火鸡的规则定为:烤炉设置到400°F，每磅烤20分钟这条规则合理吗？

因素：烘烤时间t，火鸡的尺寸l，烤鸡与烤炉的温差ΔT_m，熟肉与烤炉的温差ΔT_c，烤鸡的热传导系数k

$$k=\frac{能量/(面积\times时间)}{温度/长度}$$

变量	ΔT_m	ΔT_c	k	l	t
量纲	$ML^{-1}T^{-2}$	$ML^{-1}T^{-2}$	L^2T^{-1}	L	T

问题1 不允许缺货的存贮模型

配件厂为装配线生产若干种部件，轮换生产不同的部件时因更换设备要付生产准备费（与生产数量无关），同一部件的产量大于需求时因积压资金、占用仓库要付存贮费。今已知某一部件的日需求量100件，生产准备费5000元，存贮费每日每件1元。如果生产能力远大于需求，并且不允许出现缺货，试安排该产品的生产计划，即多少天生产一次（称为生产周期），每次产量多少，可使总费用最小。

问题分析

若每天生产一次，每次100件，无存贮费，生产准备费5000元，每天费用5000元;

若10天生产一次，每次1000件，存贮费900+800+…+100=4500元，生产准备费5000元，总计9500元，平均每天费用950元;

若50天生产一次，每次5000件，存贮费4900+4800+…+100=122500元，生产准备费5000元，总计127500元，平均每天费用2550元;

寻找生产周期、产量、需求量、生产准备费和存贮费之间的关系，使每天的费用最少。

模型假设

1 连续化，即设生产周期 T 和产量 Q 均为连续量；

2 产品每日的需求量为常数 r；

3 每次生产准备费 C_1，每日每件产品存贮费 C_2；

4 生产能力为无限大（相对于需求量），当存贮量降到零时，Q件产品立即生产出来供给需求，即不允许缺货。

模型建立

总费用与变量的关系

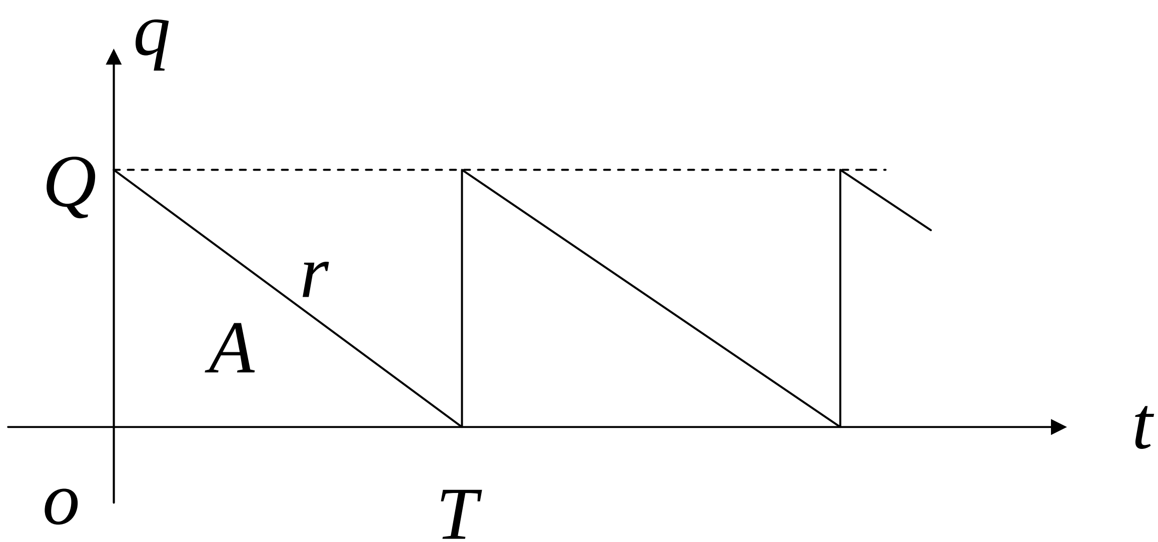
总费用=生产准备费+存贮费

存贮费=存贮单价*存贮量

存贮量=?

存贮量的计算

设 t 时刻的存贮量为 $q(t)$ ，$t=0$时生产 Q 件，存贮量 $q(0)=Q$, $q(t)$ 以需求速率 r 线性递减，直至$q(T)=0$，如图。$q(t)=Q-rt$， $Q=rT$ 。



不允许缺货模型的存贮量$q(t)$

一个周期内存贮量 $\int_0^T q(t)dt = \frac{QT}{2}$ (A的面积)

一个周期内存贮费 $c_2\int_0^T q(t)dt$

一个周期的总费用

$$\overline{C} = c_1 + c_2\int_0^T q(t)dt = c_1 + c_2\frac{QT}{2} = c_1 + c_2\frac{rT^2}{2}$$

每天平均费用 $C(T) = \frac{\overline{C}}{T} = \frac{c_1}{T} + c_2\frac{rT}{2}$

模型求解

求T满足 $\min C(T)=\dfrac{c_1}{T}+c_2\dfrac{rT}{2}$

用微分法 $C'(T)=-\dfrac{c_1}{T^2}+c_2\dfrac{r}{2}=0$

$$T=\sqrt{\frac{2c_1}{c_2 r}} \qquad Q=rT=\sqrt{\frac{2c_1 r}{c_2}}$$

每天平均最小费用 $C=\sqrt{2c_1c_2r}$

著名的 经济订货批量公式（EOQ公式）。

思考

1 建模中未考虑生产费用（这应是最大一笔费用），在什么情况下才可以不考虑它?

2 建模时作了“生产能力无限大”的简化假设，如果生产能力有限，是大于需求量的一个常数，如何建模?

结果解释

$$T=\sqrt{\frac{2c_1}{c_2 r}} \qquad Q=rT=\sqrt{\frac{2c_1 r}{c_2}} \qquad C=\sqrt{2c_1c_2 r}$$

当准备费 c_1 增加时，生产周期和产量都变大；
当存贮费 c_2 增加时，生产周期和产量都变小；
当日需求费 r 增加时，生产周期变小而产量变大。
这些定性结果符合常识，而定量关系（平方根，系数2 等）凭常识是无法得出的，只能由数学建模得到。

$$T=\sqrt{\frac{2c_1}{c_2 r}} \qquad C=\sqrt{2c_1c_2r}$$

在本例中

当 $c_1=5000, c_2=1, r=100,$

得 $T=10$，$C=1000$

这里得到的费用C与前面计算得950元有微小差别，你能解释吗?

敏感性分析

讨论参数 c_1, c_2, r 有微小变化时对生产周期T 影响。

由相对变化量衡量对参数的敏感程度。

T 对c_1 的敏感程度记为 $S(T, c_1)$

$$S(T,c_1)=\frac{\Delta T/T}{\Delta c_1/c_1}\approx\frac{dT}{dc_1}\frac{c_1}{T}=\frac{1}{2}\frac{\frac{2}{c_2 r}}{\sqrt{\frac{2c_1}{c_2 r}}}\cdot\frac{c_1}{T}=\frac{1}{2}$$

$$S(T,c_2)=-\frac{1}{2}\qquad S(T,r)=-\frac{1}{2}$$

$$S(T,c_1)=\frac{1}{2}\quad S(T,c_2)=-\frac{1}{2}\qquad S(T,r)=-\frac{1}{2}$$

意义是当准备费增加1%时，生产周期增加0.5%；

而存贮费增加1%时，生产周期减少0.5%；

日需求量增加1%时，生产周期减少0.5%。

当 c_1,c_2,r 有微小变化对生产周期影响不太大。

问题2 允许缺货的存贮模型

模型假设

1 连续化，即设生产周期 T 和产量 Q 均为连续量；

2 产品每日的需求量为常数 r；

3 每次生产准备费 C_1，每日每件产品存贮费 C_2；

4 生产能力为无限大（相对于需求量），允许缺货，每天每件产品缺货损失费C_3，但缺货数量需在下次生产（订货）时补足。

模型建立

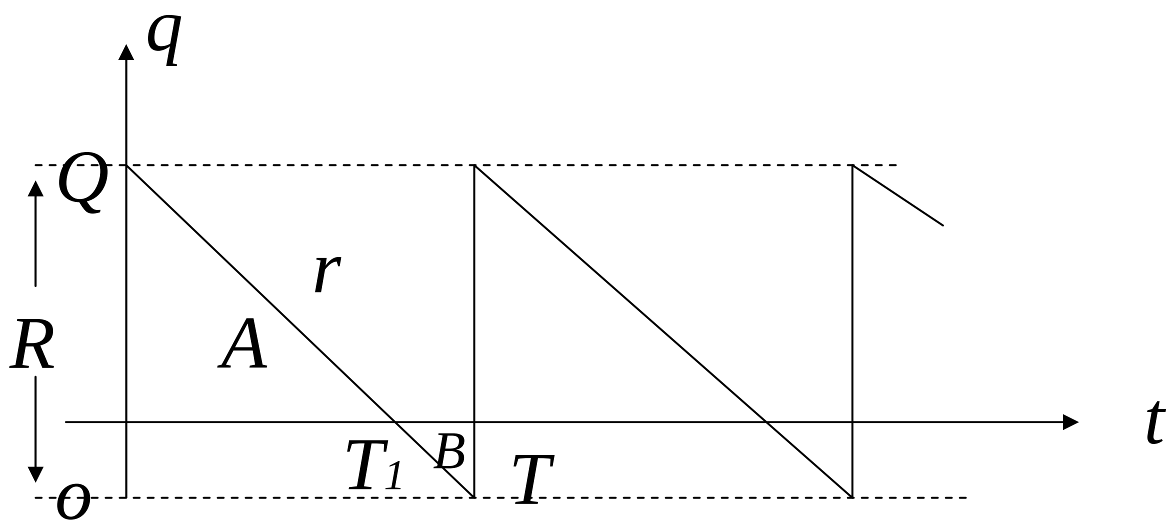
总费用=生产准备费+存贮费+缺货损失费

存贮费=存贮单价*存贮量

缺货损失费=缺货单价*缺货量

存贮量=？，缺货量=？

因存贮量不足造成缺货，因此 $q(t)$ 可取负值，$q(t)$ 以需求速率 r 线性递减，直至$q(T_1) = 0$，如图。$q(t) = Q - r\,t$， $Q = r\,T_1$ 。



允许缺货模型的存贮量$q(t)$

一个周期内存贮费 $c_2 \int_0^{T_1} q(t)dt = c_2 \frac{QT_1}{2} = c_2 \frac{Q^2}{2r}$

一个周期内缺货损失费 $c_3 \int_{T_1}^{T} q(t)dt = c_3 \frac{(rT-Q)(T-T_1)}{2}$

$$= c_3 \frac{(rT-Q)^2}{2r}$$

一个周期的总费用

$$\overline{C} = c_1 + c_2 \frac{Q^2}{2r} + c_3 \frac{(rT-Q)^2}{2r}$$

每天平均费用 $C(T,Q) = \frac{c_1}{T} + c_2 \frac{Q^2}{2rT} + c_3 \frac{(rT-Q)^2}{2rT}$

模型求解

求T,Q满足$\min C(T,Q)=\frac{c_1}{T}+c_2\frac{Q^2}{2rT}+c_3\frac{(rT-Q)^2}{2rT}$

用微分法 令 $\frac{\partial C(T,Q)}{\partial T}=0,\quad \frac{\partial C(T,Q)}{\partial Q}=0$

$$T'=\sqrt{\frac{2c_1}{c_2 r}\cdot\frac{c_2+c_3}{c_3}}\qquad Q'=\sqrt{\frac{2c_1 r}{c_2}\cdot\frac{c_3}{c_2+c_3}}$$

每天平均最小费用 $C=C(T',Q')$

每个周期的供货量 $R = rT'$

$$R = r\sqrt{\frac{2c_1}{c_2 r} \cdot \frac{c_2 + c_3}{c_3}} \qquad \lambda = \frac{c_2 + c_3}{c_3}$$

与不允许缺货模型相比较，有

$$T' = \lambda T,\quad Q' = Q / \lambda,\quad R = \lambda Q$$

结果解释

$$T' = \lambda T,\quad Q' = Q/\lambda,\quad R = \lambda Q \qquad \lambda = \frac{c_2 + c_3}{c_3}$$

1) $\lambda > 1,\ T' > T,\ Q' < Q,\ R > Q$ 即允许缺货时，周期和供货量增加，周期初的存贮量减少。

2）缺货损失费愈大，λ 愈小，T' 愈接近 T ，Q'，R 愈接近 Q 。

3) 当 $c_3 \to \infty$ 时，$\lambda \to 1,\ T' \to T,\ Q' \to Q,\ R \to Q$

不允许缺货模型可视为允许缺货模型的特例。