存贮模型

问题1 不允许缺货的存贮模型

配件厂为装配线生产若干种部件，轮换生产不同的部件时因更换设备要付生产准备费（与生产数量无关），同一部件的产量大于需求时因积压资金、占用仓库要付存贮费。今已知某一部件的日需求量100件，生产准备费5000元，存贮费每日每件1元。如果生产能力远大于需求，并且不允许出现缺货，试安排该产品的生产计划，即多少天生产一次（称为生产周期），每次产量多少，可使总费用最小。

问题分析

若每天生产一次，每次100件，无存贮费，生产准备费5000元，每天费用5000元；

若10天生产一次，每次1000件，存贮费900+800+…+100=4500元，生产准备费5000元，总计9500元，平均每天费用950元；

若50天生产一次，每次5000件，存贮费4900+4800+…+100=122500元，生产准备费5000元，总计127500元，平均每天费用2550元；

寻找生产周期、产量、需求量、生产准备费和存贮费之间的关系，使每天的费用最少。

模型假设

1 连续化，即设生产周期 T 和产量 Q 均为连续量;

2 产品每日的需求量为常数 r ;

3 每次生产准备费 C_1，每日每件产品存贮费 C_2;

4 生产能力为无限大（相对于需求量），当存贮量降到零时，Q件产品立即生产出来供给需求，即不允许缺货。

模型建立

总费用与变量的关系

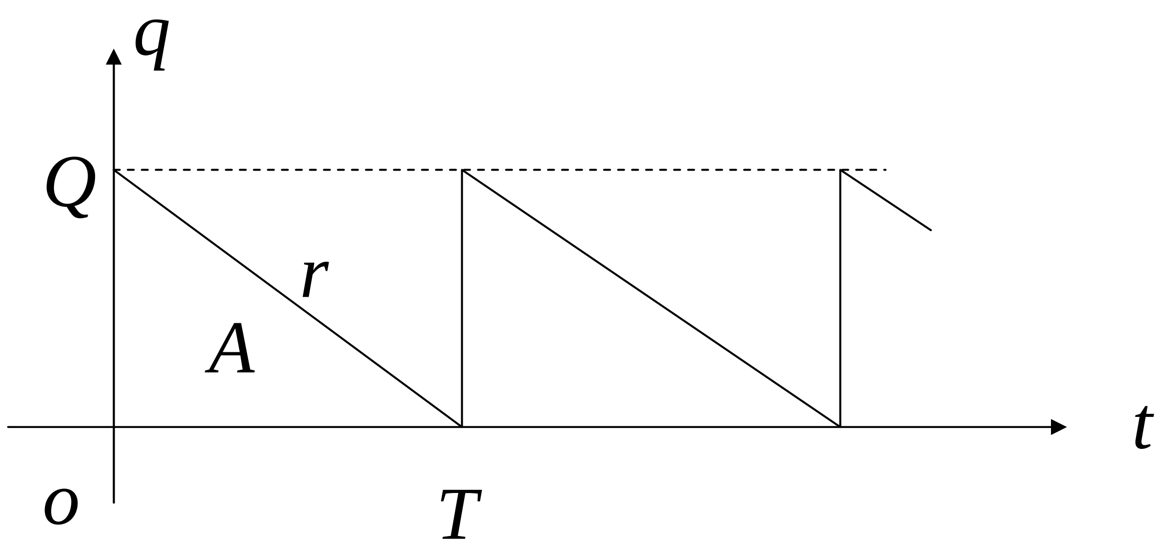
总费用=生产准备费+存贮费

存贮费=存贮单价*存贮量

存贮量=?

存贮量的计算

设 t 时刻的存贮量为 $q(t)$ ，$t=0$时生产 Q 件，存贮量 $q(0)=Q$, $q(t)$ 以需求速率 r 线性递减，直至$q(T)=0$，如图。$q(t)=Q-rt$， $Q=rT$ 。



不允许缺货模型的存贮量$q(t)$

一个周期内存贮量 $\int_0^T q(t)dt = \frac{QT}{2}$ (A的面积)

一个周期内存贮费 $c_2 \int_0^T q(t)dt$

一个周期的总费用

$$\overline{C} = c_1 + c_2 \int_0^T q(t)dt = c_1 + c_2 \frac{QT}{2} = c_1 + c_2 \frac{rT^2}{2}$$

每天平均费用 $C(T) = \frac{\overline{C}}{T} = \frac{c_1}{T} + c_2 \frac{rT}{2}$

模型求解

求T满足 $\min C(T)=\frac{c_1}{T}+c_2\frac{rT}{2}$

用微分法 $C'(T)=-\frac{c_1}{T^2}+c_2\frac{r}{2}=0$

$$T=\sqrt{\frac{2c_1}{c_2 r}} \qquad Q=rT=\sqrt{\frac{2c_1 r}{c_2}}$$

每天平均最小费用 $C=\sqrt{2c_1c_2r}$

著名的 经济订货批量公式（EOQ公式）。

思考

1 建模中未考虑生产费用（这应是最大一笔费用），在什么情况下才可以不考虑它?

2 建模时作了“生产能力无限大”的简化假设，如果生产能力有限，是大于需求量的一个常数，如何建模?

结果解释

$$T=\sqrt{\frac{2c_1}{c_2 r}} \qquad Q=rT=\sqrt{\frac{2c_1 r}{c_2}} \qquad C=\sqrt{2c_1c_2r}$$

当准备费 c_1 增加时，生产周期和产量都变大；
当存贮费 c_2 增加时，生产周期和产量都变小；
当日需求费 r 增加时，生产周期变小而产量变大。
这些定性结果符合常识，而定量关系（平方根，系数2 等）凭常识是无法得出的，只能由数学建模得到。

$$T = \sqrt{\frac{2c_1}{c_2 r}} \qquad C = \sqrt{2c_1 c_2 r}$$

在本例中

当 $c_1 = 5000, c_2 = 1, r = 100,$

得 $T = 10$， $C = 1000$

这里得到的费用C与前面计算得950元有微小差别，你能解释吗?

敏感性分析

讨论参数 c_1, c_2, r 有微小变化时对生产周期T 影响。

由相对变化量衡量对参数的敏感程度。

T 对c_1 的敏感程度记为 $S(T, c_1)$

$$S(T, c_1) = \frac{\Delta T / T}{\Delta c_1 / c_1} \approx \frac{dT}{dc_1}\frac{c_1}{T} = \frac{1}{2}\frac{\frac{2}{c_2 r}}{\sqrt{\frac{2c_1}{c_2 r}}} \cdot \frac{c_1}{T} = \frac{1}{2}$$

$$S(T, c_2) = -\frac{1}{2} \qquad S(T, r) = -\frac{1}{2}$$

$$S(T,c_1)=\frac{1}{2}\quad S(T,c_2)=-\frac{1}{2}\qquad S(T,r)=-\frac{1}{2}$$

意义是当准备费增加1%时，生产周期增加0.5%；

而存贮费增加1%时，生产周期减少0.5%；

日需求量增加1%时，生产周期减少0.5%。

当 c_1,c_2,r 有微小变化对生产周期影响不太大。

问题2 允许缺货的存贮模型

模型假设

1 连续化，即设生产周期 T 和产量 Q 均为连续量；

2 产品每日的需求量为常数 r；

3 每次生产准备费 C_1，每日每件产品存贮费 C_2；

4 生产能力为无限大（相对于需求量），允许缺货，每天每件产品缺货损失费C_3，但缺货数量需在下次生产（订货）时补足。

模型建立

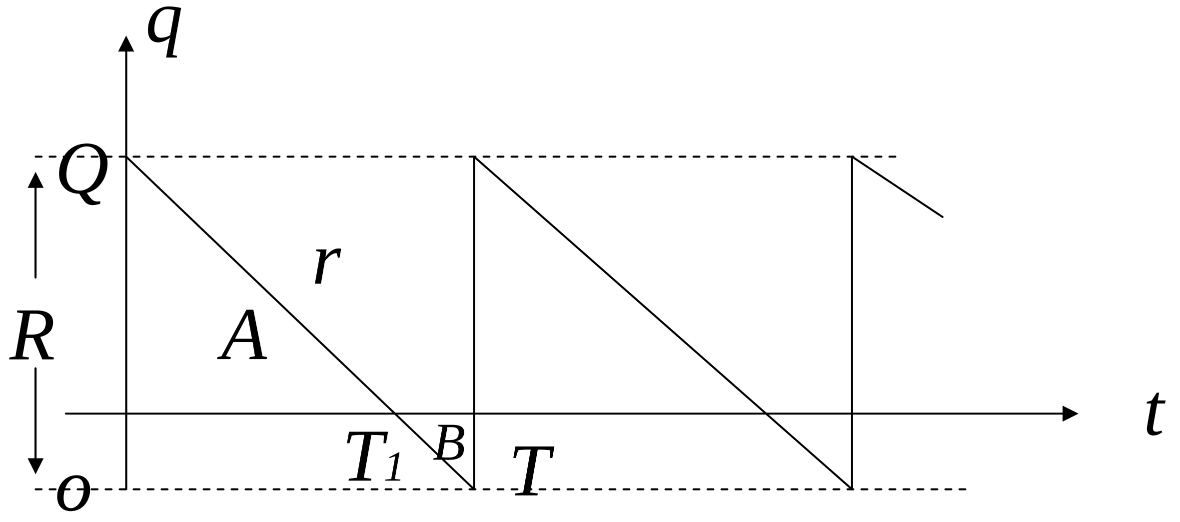
总费用=生产准备费+存贮费+缺货损失费

存贮费=存贮单价*存贮量

缺货损失费=缺货单价*缺货量

存贮量=?，缺货量=?

因存贮量不足造成缺货，因此 $q(t)$ 可取负值，$q(t)$ 以需求速率 r 线性递减，直至$q(T_1) = 0$，如图。$q(t) = Q - r\,t$， $Q = r\,T_1$ 。



允许缺货模型的存贮量$q(t)$

一个周期内存贮费 $$c_2\int_0^{T_1} q(t)dt = c_2\frac{QT_1}{2} = c_2\frac{Q^2}{2r}$$

一个周期内缺货损失费 $$c_3\int_{T_1}^{T} q(t)dt = c_3\frac{(rT-Q)(T-T_1)}{2}$$

$$= c_3\frac{(rT-Q)^2}{2r}$$

一个周期的总费用

$$\overline{C} = c_1 + c_2\frac{Q^2}{2r} + c_3\frac{(rT-Q)^2}{2r}$$

每天平均费用 $$C(T,Q) = \frac{c_1}{T} + c_2\frac{Q^2}{2rT} + c_3\frac{(rT-Q)^2}{2rT}$$

模型求解

求T,Q满足$\min C(T,Q)=\dfrac{c_1}{T}+c_2\dfrac{Q^2}{2rT}+c_3\dfrac{(rT-Q)^2}{2rT}$

用微分法 令 $\dfrac{\partial C(T,Q)}{\partial T}=0,\quad \dfrac{\partial C(T,Q)}{\partial Q}=0$

$$T'=\sqrt{\frac{2c_1}{c_2 r}\cdot\frac{c_2+c_3}{c_3}}\qquad Q'=\sqrt{\frac{2c_1 r}{c_2}\cdot\frac{c_3}{c_2+c_3}}$$

每天平均最小费用 $C=C(T',Q')$

每个周期的供货量　$R = rT'$

$$R = r\sqrt{\frac{2c_1}{c_2 r} \cdot \frac{c_2 + c_3}{c_3}} \qquad \lambda = \frac{c_2 + c_3}{c_3}$$

与不允许缺货模型相比较，有

$$T' = \lambda T, \quad Q' = Q / \lambda, \quad R = \lambda Q$$

结果解释

$$T' = \lambda T, \quad Q' = Q/\lambda, \quad R = \lambda Q \qquad \lambda = \frac{c_2 + c_3}{c_3}$$

1) $\lambda > 1, \quad T' > T, \quad Q' < Q, \quad R > Q$ 即允许缺货时，周期和供货量增加，周期初的存贮量减少。

2）缺货损失费愈大，λ 愈小，T' 愈接近 T ，$Q', \ R$ 愈接近 Q 。

3) 当$c_3 \to \infty$时，$\lambda \to 1, \quad T' \to T, \quad Q' \to Q, \quad R \to Q$

不允许缺货模型可视为允许缺货模型的特例。