

鲑鱼数量的变化问题

一 问题的提出

海洋中鱼的数量通常是按繁殖期的长短呈周期变化的。以太平洋里的鲑鱼为例，其生长繁殖过程大致是，成年的鲑鱼产下大量的卵，在卵成长为幼鱼和幼鱼长大的过程中，相当大的部分被成年的鱼吃掉，剩下来的还要被恶劣的环境淘汰一些，而成年的鱼在产卵后则活不了多久就会死掉。

试建立鲑鱼产卵期到来之前，其数量变化规律的数学模型。

二 生长特点

1 呈周期性变化；

2 在每个周期里，经过了从卵、幼鱼到成年鱼的变化过程。

一般地，长期观察是呈离散变化，而在每个离散时间段里呈连续变化。

如：树木的生长、冰箱温度的变化等，

嵌入式模型

嵌入式模型

它把一个个短期内描述连续变化过程的微分方程，嵌入到一个长期的描述离散变化规律的差分方程中，而那些描述短期演变过程的微分方程在定性上应该是相同的，只是在定量上参数与初始条件有所改变。

三 符号的说明

x_n : 第 n 个繁殖期（周期）开始时成年鲑鱼（鲑鱼）的数量，以条数计， $n=1,2,\dots$;

$y(t)$: 在每个周期内，时刻 t 幼鱼的数量;

为了反映每个周期末和下个周期开始时的突变性，引入下列记号：

$$n < t_a \leq t \leq t_b < n + 1,$$

$$t_a = n + \varepsilon, \quad t_b = n + 1 - \varepsilon,$$

ε 可以很小。在区间 $[n, t_a], [t_b, n + 1]$ 内允许数量上的突变

四 模型的假设

- 1 $y(t_a)$ 与 x_n 成正比，比例系数为 α ，表示每条鱼的产卵量；
- 2 单位时间内 $y(t)$ 减少的比例与 x_n 成正比，比例系数为 β ，表示鲑鱼吞食幼鱼的能力；
- 3 x_{n+1} 与 $y(t_b)$ 成正比，比例系数为 γ ，表示在繁殖期末幼鱼存活长成鲑鱼的比例。

五 模型建立

根据假设条件容易写出

$$y(t_a) = \alpha x_n \quad (1)$$

$$\frac{\dot{y}}{y} = -\beta x_n, \quad n < t_a \leq t \leq t_b < n + 1 \quad (2)$$

$$x_{n+1} = \gamma y(t_b) \quad (3)$$

方程 (2) 的解为

$$y(t) = y(t_a) e^{-\beta x_n (t-t_a)} \quad (4)$$

将 (1) , (4) 代入 (3) 式得

$$x_{n+1} = \gamma \alpha x_n e^{-\beta (t_b - t_a) x_n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

若记 $a = \gamma\alpha, b = \beta(t_b - t_a)$ (6)

则方程 (5) 可写作

$$x_{n+1} = ax_n e^{-bx_n}, n = 0, 1, 2, \dots \quad (7)$$

差分方程 (7) 是将每周期内的微分方程 (2) 嵌入 (1)、(3) 得到的。这种嵌入式模型的一般形式可以表为

$$\begin{cases} y(t_a) = f(x_n) \\ \dot{y}(t) = g(y) & n < t_a \leq t \leq t_b < n + 1 \\ x_{n+1} = h(y(t_b)) \end{cases} \quad (8)$$

差分方程 (7) 无法求出 x_n 的显式表达式，只能递推求数值解。例如设 $\alpha = 10^5, x_0 = 1$ (表示1个数量单位，

比如 10^8 条)，第1代 ($n = 0$) 鲑鱼吞食掉90%的幼鱼

即 $\frac{y(t_b)}{y(t_a)} = 0.1$ ，代入 (4)，(6) 是可以算出

$$0.1 = e^{-\beta(t_b - t_a)}, b = \beta(t_b - t_a) = \ln 10 \approx 2.3$$

若 γ 分别取 0.5×10^{-4} , 1.1×10^{-4} , 1.5×10^{-4} ，则由 (6) 式

$$a = \gamma\alpha = 5, 11, 15$$

将 a, b, x_0 代入 (7) 式递推计算 x_n ，考察鲑鱼数量的周期变化规律，结果见表。

n	$a = 5$	$a = 11$	$a = 15$	n	$a = 5$	$a = 11$	$a = 15$
0	1.000	1.000	1.000	11	0.6979	1.739	1.884
1	0.500	1.100	1.500	12	0.6996	0.3488	0.3691
2	0.7906	0.9611	0.7115	13	0.6986	1.719	2.367
3	0.6402	1.156	2.074	14	0.6992	0.3614	0.1526
4	0.7329	0.8876	0.2625	15	0.6988	1.730	1.611
5	0.6778	1.265	2.151	16	0.6991	0.3545	0.5919
6	0.7117	0.7562	0.2278	17	0.6989	1.724	2.272
7	0.6912	1.458	2.022	18	0.6990	0.3581	0.1821
8	0.7037	0.5584	0.2882	19	0.6989	1.727	1.796
9	0.6961	1.698	2.226	20	0.6990	0.3562	0.4308
10	0.7007	0.3744	0.1983	21		1.725	2.396

n	$a = 11$	$a = 15$	n	$a = 11$	$a = 15$
22	0.3572	0.1443	32	0.3568	0.4531
23	1.726	1.552	33	1.726	2.394
24	0.3567	0.6526	34	0.3568	0.1449
25	1.726	2.178	35	1.726	1.557
26	0.3569	0.2167	36	0.3568	0.6481
27	1.726	1.973	37	1.726	2.186
28	0.3568	0.3147	38	0.3568	0.2137
29	1.726	2.287	39	1.726	1.960
30	0.3569	0.1771	40	0.3568	0.3225
31	1.726	1.676			

按 (7) 式 ($b=2.3$ 和不同的 a) 计算的 x_n

由表可知，对于 $a = 5$, x_n 趋向稳态值0.699，即初值的70%；对于 $a = 11$, x_n 交替地趋向两个稳态值0.3568和1.726，对于 $a = 15$ 则难以看出什么规律。

六 平衡点及稳定性分析

为了研究对于不同的 a ，鲑鱼数量 x_n 的变化规律，我们利用差分方程求解的有关结果讨论 (7) 的平衡点及稳定性。

方程 (7) 的平衡点 x^* 满足

$$x^* = ax^* e^{-bx^*} \quad (9)$$

注： $x^* = 0$ 也是方程 (7) 的平衡点，但容易验证它不是稳定的 ($a > 1$)，不再讨论，以后平衡点均指非零的。

(9) 的非零解为

$$x^* = \frac{\ln a}{b} \quad (10)$$

平衡点稳定的条件是 $|f'(x^*)| < 1$, 这里 $f(x^*) = ax^* e^{-bx^*}$

因为

$$|f'(x^*)| = ae^{-bx^*} |1 - bx^*| = |1 - \ln a|$$

所以当 $-1 < 1 - \ln a$, 即 $a < e^2 = 7.389$ 时 x^* 是稳定平衡点, 而当 $a > e^2$ 时 x^* 不稳定。

这个结果表明, x_n 是否稳定只取决于 a , 与 b 无关。

而 $a = \gamma\alpha$, 注意到 α 和 γ 的含义可知 a 表示的是鲑鱼从一个周期到下一周期增长关系的一个因素 (增长率还与 b 有关), 正是这因素决定了 x_n 的稳定状态情况。

根据上述分析，当 $a = 5$ 时， x^* 稳定，且若

$$b = \ln 10 \approx 2.3$$

由 (10) 可得 $x^* \approx 0.699$ ，而当 $a = 11, 15$ 时 x^* 不稳定

这与前面的数值结果（见表）是一致的。

为了进一步研究 $a > 7.389$ （如 $a = 11$ ）时 x_n 的变化情况，应该考察方程（参考倍周期收敛的相关内容）

$$x_{n+2} = f(x_{n+1}) = f^{(2)}(x_n) \quad (11)$$

其中 f 的具体形式由方程 (7) 给出。

首先用无量纲化方法简化方程，令

$$z_n = \frac{bx_n}{\ln a} \quad (12)$$

则方程化为 (7) 化为

$$z_{n+1} = z_n e^{\lambda(1-z_n)} \quad (13)$$

$$\lambda = \ln a \quad (14)$$

显然，当 $\lambda < 2$ 时 $z^* = 1$ 是方程 (13) 的稳定平衡点，而 $\lambda > 2$ 时 $z^* = 1$ 不稳定。下面讨论 $\lambda > 2$ 的情况。

考察方程

$$z_{n+2} = g(z_{n+1}) = g^{(2)}(z_n) \quad (15)$$

其中 g 由 (13) 给定。方程 (15) 的平衡点除 $z^* = 1$ 以外还有 z_1^* 和 z_2^* ，满足

$$z_1^* = z_2^* e^{\lambda(1-z_2^*)} \quad \text{和} \quad z_2^* = z_1^* e^{\lambda(1-z_1^*)} \quad (16)$$

由 (16) 不难得到

$$z_1^* + z_2^* = 2 \quad (17)$$

于是 z_1^*, z_2^* 是方程

$$we^{\lambda(1-w)} = 2 - w \quad (18)$$

的两个根。若记函数

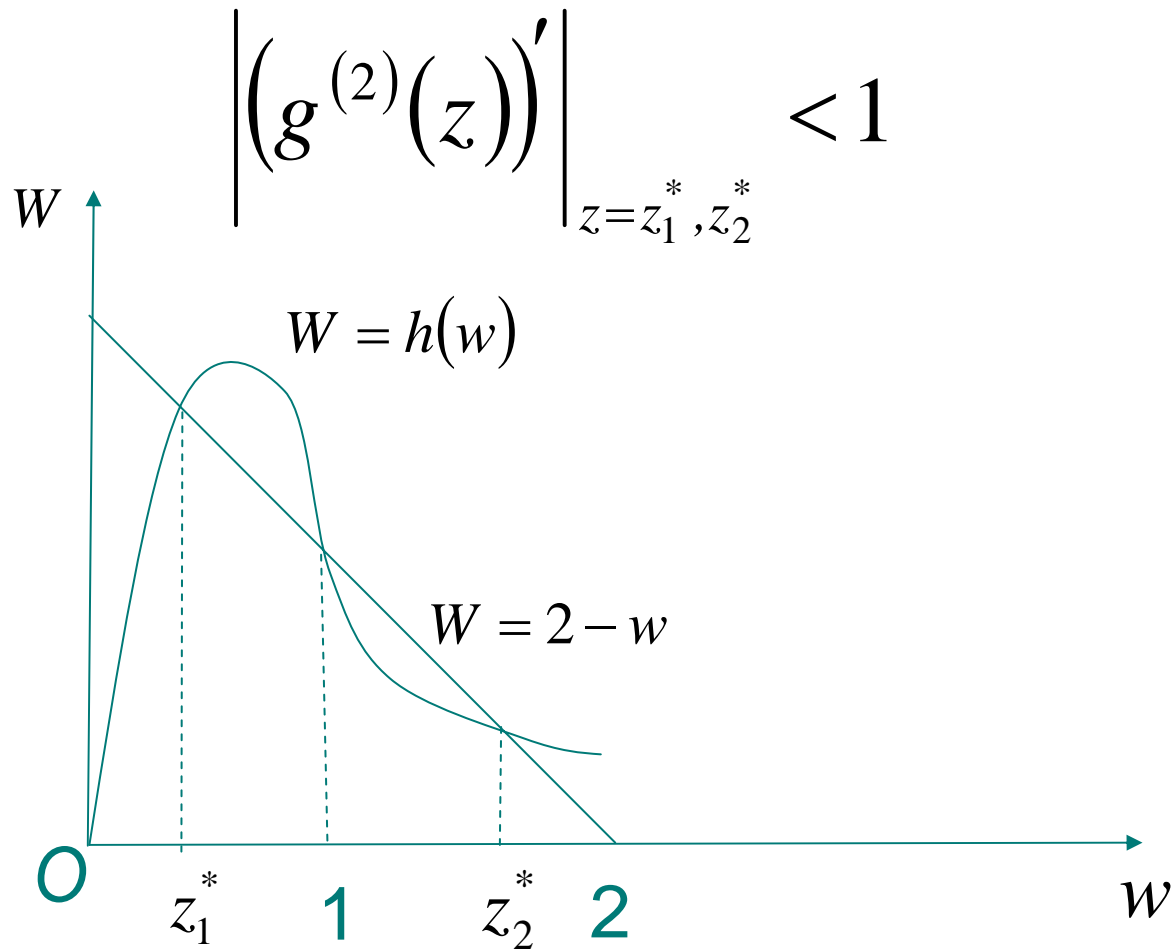
$$h(w) \equiv we^{\lambda(1-w)} \quad (19)$$

则曲线 $W = h(w)$ 和直线 $W = 2 - w$ 有3个交点，其横坐标是 z_1^* ，1 和 z_2^* （见图）。当 $a = 11$ 时 $\lambda = \ln a = 2.398$

用数值方法可以算出

$$z_1^* = 0.3427, \quad z_2^* = 1.6573 \quad (20)$$

z_1^*, z_2^* 是方程 (15) 稳定平衡点的条件是



经过比较精密的计算得到，当

$$2 < \lambda < 2.5265$$

时上述条件成立。

(21)

这个结果表明，在条件 (21) 下方程 (13) 给出的序列 z_n 是2倍周期稳定的，即子序列 z_{2k} 和 z_{2k+1} 当 $k \rightarrow \infty$ 时分别趋向于 z_1^* 和 z_2^*

代回到变量 x_n ，由 (14) 式可知条件 (21) 相当于

$$7.389 < a < 12.51 \quad (22)$$

所以当 $a=11$ 时 x_n 是2倍周期稳定的，两个稳定值 x_1^* 和 x_2^* 可以从 (由 (12) 式)

$$x_{1,2}^* = \frac{\ln a}{b} z_{1,2}^* \quad (23)$$

和 (20) 式算出。当 $b = \ln 10 \approx 2.3$ 时

$x_1^* = 0.3569$, $x_2^* = 1.7259$
与表中结果一致。

当 $\lambda > 2.5265$ 以后应该研究 z_n 的 2^k 倍周期稳定的情况 ($k = 2, 3, \dots$)。若记 λ_k 是 2^k 倍周期稳定的上限, 有结果指出 $\lambda \rightarrow \infty$ 时, $\lambda_k \rightarrow 2.6924$, 当 $\lambda > 2.6924$ 时 z_n 的趋势出现混沌现象。表中的 $a = 15$ 相当于 $\lambda = 2.71$, 所以 x_n 的变化没有什么规律性可言。

评注:

嵌入式模型适用于将各个周期内用微分方程描述的、性质上相同的连续变化规律, 嵌入到长期的用差分方程描述的离散变化过程的问题。除了生物的周期性繁殖现象外, 再生资源的周期性收获, 人体对周期性注入药物的反应, 周期性排放污物的环境变化等都可以用这种模型研究。

我们在这里遇到了序列 x_n 的 2^k 倍周期收敛现象 ($k = 0, 1, 2, \dots$)，因为方程 (13) 的非线性程度更高，所以，对平衡点收敛性分析更为困难。

