学习本课程的基本要求和注意事项

一、基本要求

- 课前课后应做好预习和复习
- 按时、准时上课，不得无故迟到、早退和缺席
- 上课认真听讲，做好笔记（至少要记录课程的重点内容和基本要求）
- 课后认真复习，按时完成作业；整理笔记
- 考勤授权班长或学习委员负责并做好记录，教师不定期抽查
- 严格执行学校有关课堂教学的规章制度

二、成绩组成和考核方式

- 组成：平时成绩站 20%（出勤、听课、作业、笔记等）+ 考试成绩站 80%

方式：笔试

三、参考文献

1 梁昆森．数学物理方法，第三版，高等教育出版社，1998

2 向安平．数学物理方法习题解答，电子文档，2003.10

3 斯颂乐等．数学物理方法习题解答，天津科学技术出版社，1982.10

4 谢树艺．矢量分析与场论，第二版，人民教育出版社，1985

5 郭敦仁．数学物理方法，第二版，人民教育出版社，1991

6 胡嗣柱等．数学物理方法，复旦大学出版社，1989

7 四川大学数学系．高等数学，第四册，人民教育出版社，1979

8 管平等．数学物理方法，高等教育出版社，2001

9 A.H.吉洪诺夫等．数学物理方法，新一版，人民教育出版

第一章 复变函数

在许多工程技术领域（如电磁场理论、量子力学、固体物理、材料物理、流体力学等）经常遇到复变量的函数．复变函数理论研究复变量之间的对应关系，它是实变函数理论在复数域中的推广，因此两者之间有许多相近之处，这有助于我们学习比较，但在学习中更要注意它们之间的不同之处．本章主要讨论复变函数的一些基本概念．

§1.1 复变函数与复数运算

1.1.1 复数的基本概念

1. 复数的代数表示

一个复数 z 总可以表为某个实数 x 与某个纯虚数 $\mathrm{i}y$ 的和，

复数的代数式 $z = x + \mathrm{i}y,$ (1.1-1)

x 和 y 则分别叫作该复数的实部和虚部，并分别记作

$x = \mathrm{Re}z, \quad y = \mathrm{Im}z$

- 复数 $z \rightleftharpoons$ 复平面上的点 (x, y).
- 复数 $z \rightleftharpoons$ 复平面上的矢量 $\vec{\rho}$.
- 矢量 $\vec{\rho} \rightleftharpoons$ 复平面上的点 (x, y).

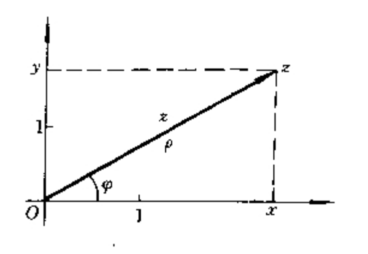

图 1-1

2. 复数的三角表示和指数表示

在极坐标下—复数的三角式

$$z = \rho(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi), \tag{1.1-2}$$

其中

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi; \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \varphi = \operatorname{arc\,tg}(y/x). \end{cases} \tag{1.1-3}$$

ρ —复数的模, φ —复数的幅角.

复数的指数式

$$z = \rho e^{\mathrm{i}\varphi}. \tag{1.1-4}$$

由于正余弦函数以 2π 为周期,故复数的幅角 φ 加减 $2k\pi$ 表示同一复数,即复数的幅角不能唯一确定.

$$\varphi = \operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi, \quad (k = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$$

幅角： Arg$z$

主值或主幅角： $\arg z$, $0 \le \arg z < 2\pi$

0的幅角无明确意义

3. 共轭复数

复数 z 的共轭复数 z^* 定义为

$$z^* = x - \mathrm{i}y = \rho e^{-\mathrm{i}\varphi} = \rho(\cos\varphi - \mathrm{i}\sin\varphi). \quad (1.1\text{-}5)$$

即共轭复数 z^* 是复数 z 对实轴的映射.复数 z 和其共轭复数 z^* 之积等于复数模的平方,即

$$|z|^2 = zz^*$$

1.1.2 无限远点*

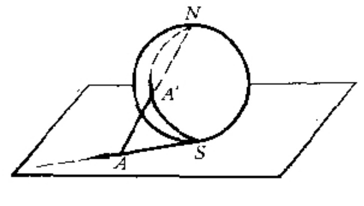

图 1-2

- 定义：在复平面上复数的模为无限大的复数所对应的点
- 理解：测地投影、复数球.

前面我们将模为有限的复数跟复数平面上的有限远点一一对应起来，在复变函数论中，通常还将模为无限大的复数也跟复数平面上的一点相对应，并且称这一点为无限远点．关于无限远点，可作如下理解．把一个球放在复数平面上，球以南极 S 跟复数平面相切于原点，如图所示．在复数平面上任取一点 A，它与球的北极 N 连线跟球面相交于 A'．这样，复数平面上的有限远点跟球面上 N 以外的点一一对应了起来．这种对应关系叫作测地投影，这个球叫作复数球，设想 A 点沿着一根通过原点的直线向无限远移动，对应的点 A' 就沿着一根

子午线(经线)向北极 N 逼近．如果 A 沿着另一根通过原点的直线向无限远移动，则 A' 沿着另一根子午线向北极 N 迫近．其实，不管 A 沿着什么样的曲线向无限远移动，A' 总是相应地沿着某种曲线逼近于 N．因此，可以把平面上的无限远看作一点，即通过测地投影而跟复数球上北极 N 相应的那一点．我们把无限远点记作 ∞，它的模为无限大，它的辐角则没有明确意义．

1.1.3 复数的运算

假设有两个复数

$$z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1, \qquad z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$$

1. 和

定义:

$$z = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + \mathrm{i}(y_1 + y_2), \tag{1.1-6}$$

复数的和满足交换律和结合律. 几何意义：两个复数的和所对应的矢量等于两个复数对应矢量之合矢量.因此

$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|. \tag{1.1-7}$$

2. 差

定义:

$$z = z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + \mathrm{i}(y_1 - y_2) \tag{1.1-8}$$

其几何意义类似于和运算.因此,必然有

$$|z_1 - z_2| \ge |z_1| - |z_2|. \tag{1.1-9}$$

3. 积

定义:

$$z = z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + \mathrm{i}(x_1 y_2 + x_2 y_1) \tag{1.1-10}$$

满足交换、结合律与分配律.

4. 商

定义：

$$z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\mathrm{i}\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2} \tag{1.1-11}$$

用复数的三角式或指数式能更方便表示乘、除、乘方和开方运算

$$z_1z_2=\rho_1\rho_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+\mathrm{i}\sin(\varphi_1+\varphi_2)] \tag{1.1-12}$$

$$=\rho_1\rho_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1+\varphi_2)} \tag{1.1-13}$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+\mathrm{i}\sin(\varphi_1-\varphi_2)] \tag{1.1-14}$$

$$=\frac{\rho_1}{\rho_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1-\varphi_2)} \tag{1.1-15}$$

$$z^n=\rho^n(\cos n\varphi+\mathrm{i}\sin n\varphi) \tag{1.1-16}$$

$$=\rho^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi} \tag{1.1-17}$$

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\varphi}{n}\right) \tag{1.1-18}$$

$$= \sqrt[n]{\rho}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\varphi}{n}}. \quad (1.1\text{-}19)$$

由于 $\sqrt[n]{z}$ 的幅角可以加减 $\frac{2\pi}{n}$ 的整数倍，所以 $\sqrt[n]{z}$ 可以取 n 个不同的值.

复数可用实部和虚部表示,故复数的研究可归结为对应实数的研究.