§1.2 复变函数

1.2.1 复变函数的定义

定义：若在复数平面(或球面)上存在一个点集 E (复数的集合)，对于 E 的每一点(每一个 z 值)，按照一定的规律，有一个或多个复数值 w 与之相对应，则称 w 为 z 的函数—复变函数， z 称为 w 的宗量，定义域为 E ，记作

$$w = f(z), \qquad z \in E.$$

本课程主要研究解析函数.

1.2.2 区域的概念

1 区域—满足一定条件的点集，用 B 表示

2 邻域—z_0 的邻域定义为一复数 z_0 为圆心、任意小正实数 ε 为半径所作的圆内所有点的集合

3 内点—如 z_0 及其邻域均属于点集 E，则 z_0 称为该点集的内点

4 外点—如 z_0 及其邻域不属于点集 E，则 z_0 称为该点集的外点

5 境界点—如在 z_0 的每个邻域内，既有属于 E 的点，也有不属于 E 的点，则称 z_0 为该点集的境界点，它既不是E 的内点，也不是 E 的外点．境界点的全体称为境界线．

1. 区域满足的条件

1 点集全由内点组成

2 具有连通性．即点集中的任意两点都可以用一条折线连接起来，且折线上的点全是内点．

既是开集又是连通的点集就称为区域．

2. 闭区域与开区域

1 闭区域—由内点和境界线构成的点集，用 $\overline{B}$表示

2 开区域—由内点构成的点集,用 B表示

1.2.3 复变函数举例

$$f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n,\quad n\text{为正整数};\tag{1.2-1}$$

$$f(z)=\frac{a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n}{b_0+b_1z+b_2z^2+\cdots+b_mz^m},\quad n,m\text{为正整数};\tag{1.2-2}$$

$$f(z)=\sqrt{z-a};\tag{1.2-3}$$

$$f(z)=\mathrm{e}^z=\mathrm{e}^{z+\mathrm{i}y}=\mathrm{e}^x(\cos y+\mathrm{i}\sin y),\quad T=2\pi\mathrm{i};\tag{1.2-4}$$

$$f(z)=\sin z=\frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}),\quad T=2\pi;\tag{1.2-5}$$

$$f(z)=\cos z=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}),\quad T=2\pi;\tag{1.2-6}$$

$$f(z) = \text{sh}z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}), \quad T = 2\pi i; \tag{1.2-7}$$

$$f(z) = \text{sh}z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}), \quad T = 2\pi i; \tag{1.2-8}$$

$$f(z) = \ln z = \ln(|z|e^{i\text{Arg}z}) = \ln|z| + i\text{Arg}z, ; \tag{1.2-9}$$

$$f(z) = z^s = e^{s\ln s}, \quad s\text{为复数}. \tag{1.2-10}$$

式(1.2-5)和(1.2-6)定义的正余弦函数在服数域中其模完全可以大于 1（$|\sin z| > 1$, $|\cos z| > 1$），式(1.2-9)定义的对数函数 $\ln z$ 有无限多个值，在复数域中，对负实数也有意义.

1.2.4 复变函数与实变函数的关系

若复变函数的实部和虚部分别用 $u(x,y)$, $v(x,y)$ 表示，则

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y). \tag{1.2-11}$$

即复变函数归结为一对二元实变函数. 因此，有关实变函数的许多定

义、公式、定理可移植到复变函数论中.

如复变函数连续的定义：当 $z \to z_0$ 时，如果 $f(z) \to f(z_0)$，则复变函数 $f(z)$ 在点 $z_0 = x_0 + iy_0$ 处连续. 这和归结为一对二元实变函数 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续，即

$$\begin{cases} x \to x_0 \\ y \to y_0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} u(x,y) \to u(x_0,y_0), \\ v(x,y) \to v(x_0,y_0). \end{cases}$$