§1.4 解析函数

1.4.1 解析函数的定义

定义：如果函数 $f(z)$ 在点 z_0 及其邻域上处处可导，则称函数 $f(z)$ 在 z_0 点解析. 在区域 B 上处处可导的函数称为该区域上的解析函数.

由复变函数的导数运算法则可知，区域 B 的内解析函数的和、差积、商（分母不为零）仍是 B 内的解析函数，两个或多个解析函数的复合函数仍是解析函数.

1.4.2 解析函数的性质

✪ 在区域 B 上解析的函数 $f(z) = u + \mathrm{i}v$，其实部与虚部构成区域 B 上的两组正交曲面（线）族:

$$u(x, y) = C_1, \qquad v(x, y) = C_2$$

证明：由 C-R 条件

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y} \end{cases} \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

即

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j}\right) u \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j}\right) v = 0$$

$$\nabla u \cdot \nabla v = 0. \tag{1.4-1}$$

即标量场 u, v 的梯度（法向变化）正交或标量场的等量面的法向相互正交.

✪ **在区域 B 上解析的函数 $f(z) = u + \mathrm{i}v$，其中 u, v 是 B 上调和函数（在 B 上有二阶连续偏导数，且满足 Laplace 方程 $\nabla^2 H = 0$）**

证明：由 C-R 条件

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}, \quad \dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = -\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \quad \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \longrightarrow \nabla^2 u = 0, \\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} \longrightarrow \nabla^2 v = 0. \end{cases} \tag{1.4-2}$$

1.4.3 解析函数实部与虚部互求

设已知解析函数的实部则可由解析函数的性质求该解析函数.

$$\mathrm{d}v = \frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y = -\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y. \tag{1.4-3}$$

解法：①曲线积分法；②凑全微分法；③不定积分法.

例1 已知解析函数 $f(z)$ 的实部 $u(x,y) = x^2 - y^2$，求虚部和这个解析函数. 解首先验证 u 是调和函数，我们有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2.$$

可见，u 的确是某个解析函数的实部.

(1)曲线积分法. 先计算 u 的偏导数

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y.$$

根据 C-R 条件，有

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2y, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x.$$

于是

$$\mathrm{d}v = 2y\mathrm{d}x + 2x\mathrm{d}y.$$

右端应是全微分，积分与路径无关．于是选择图示积分路径，得

$$v = \int^{(x,y)} 2y\mathrm{d}x + 2x\mathrm{d}y + C = \int_{(0,0)}^{(x,0)} 2y\mathrm{d}x + 2x\mathrm{d}y + C$$
$$+ \int_{(x,0)}^{(x,y)} 2y\mathrm{d}x + 2x\mathrm{d}y + C = \int_{(x,0)}^{(x,y)} 2x\mathrm{d}y + C = 2xy + C.$$

其中 C 为积分常数．

(2)凑全微分法．由上可知

$$\mathrm{d}v = 2y\mathrm{d}x + 2x\mathrm{d}y = \mathrm{d}(2xy).$$

所以

$$v = 2xy + C.$$

可见，此法与曲线积分法无本质区别，在很容易将右端凑成全微分显式时，这一方法是很方便的.

(3)不定积分法. 前已算出

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 2x, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = 2y$$

将上面的第一式对 y 积分，视 x 为参数，有

$$v = \int 2x\mathrm{d}y + \varphi(x) = 2xy + \varphi(x),$$

其中 $\varphi(x)$ 为 x 的任意函数. 将上式两边再对 x 求导,

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2y + \varphi'(x).$$

由 C-R 条件，$\varphi'(x) = 0$，因此 $\varphi(x) = C$ （常数），所以

$$v = 2xy + C.$$

最后得所求的解析函数为

$$f(z) = x^2 - y^2 + \mathrm{i}(2xy + C) = z^2 + \mathrm{i}C.$$

§1.5 平面标量场*

由平面静电场出发，可推断，某一区域上的解析函数 $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ 的实部和虚部总可以表示该区域上的某种平面标量场（如电场）．解析函数表示该平面标量场的复势.

§1.6 多值函数*

不要求