第二章 复变函数的积分

本节主要讨论复变函数积分的概念及性质. 复变函数的积分是研究解析函数的一个重要工具，本节要建立的 Cauchy 积分定理和 Cauchy 积分公式是解析函数理论的基础.

§2.1 复变函数的积分

2.1.1 积分的定义

设在复平面上的某一光滑或分段光滑（曲线方程具有连续或分段连续非零导数）曲线 ℓ 上定义了连续函数 $f(z)$，在 ℓ 上任取一系列分点 $z_k, (k = 0, 1, 2, \cdots, n, k = 0$时为起点$A, k = n$时为终点$B)$，把 ℓ 分为 n 小段．在每小段 $[z_{k-1}, z_k]$ 上任取一点 ξ，如果和式

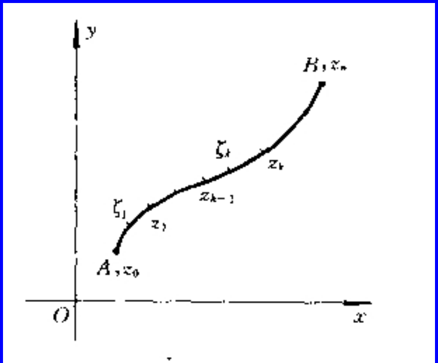

图 2-1

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(z_k - z_{k-1}).$$

当 $n\to\infty$ 时的极限存在，且与式中各个 ξ_k 的选择无关，则将此极限定义为函数 $f(z)$ 沿 ℓ 的积分，即

$$\int_{\ell} f(z)\mathrm{d}z = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(z_k - z_{k-1}) \tag{2.1-1}$$

$$= \int_{\ell} u(x,y)\mathrm{d}x - v(x,y)\mathrm{d}y + \mathrm{i}\int_{\ell} v(x,y)\mathrm{d}x + u(x,y)\mathrm{d}y. \tag{2.1-2}$$

可见，复变函数的积分可归结为两个实变函数的线积分，它们分别是复变函数积分的实部和虚部，因而实变函数线积分的许多性质也对复变函数沿曲线的积分有效.

2.1.2 性质

1 常数因子可以移到积分号外；
2 函数的和的积分等于各函数积分的和；
3 反转积分路径，积分变号；

4 全路径上的积分等于各段上的积分之和.

2.1.3 举例

例 1 设 ℓ 为以 z_0 为中心，r 为半径的圆周，证明：

$$\int_{\ell}\frac{\mathrm{d}z}{(z-z_0)^n}=\begin{cases}2\pi \mathrm{i}, & n=1,\\ 0\quad, & n\neq 1, n\text{为整数}.\end{cases}$$

证明 ℓ 的方程可以表示为 $z-z_0=re^{\mathrm{i}\theta}(0\le\theta\le 2\pi)$，于是 $\mathrm{d}z=\mathrm{i}re^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta$，当 $n=1$ 时

$$\int_{\ell}\frac{\mathrm{d}z}{z-z_0}=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{i}re^{\mathrm{i}\theta}}{re^{\mathrm{i}\theta}}\mathrm{d}\theta=\mathrm{i}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta=2\pi\mathrm{i}$$

当 n 为整数，且 $n\neq 1$ 时

$$\int_{\ell}\frac{\mathrm{d}z}{(z-z_0)^n}=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{i}re^{\mathrm{i}\theta}}{re^{\mathrm{i}\theta}}\mathrm{d}\theta=\frac{\mathrm{i}}{r^{n-1}}\int_0^{2\pi}e^{-\mathrm{i}(n-1)\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{\mathrm{i}}{r^{n-1}}\int_0^{2\pi}[\cos(n-1)\theta-\mathrm{i}\sin(n-1)\theta]\mathrm{d}\theta=0$$

可见，积分值与 z_0, r 值无关．例 2　计算积分

$$I_1 = \int_{\ell_1} \mathrm{Re} z \mathrm{d}z, \qquad I_2 = \int_{\ell_2} \mathrm{Re} z \mathrm{d}z,$$

I_1, I_2 分别如图2-2所示，两条路径的起点和终点相同，均自 $z = 0$ 至 $z = 1 + \mathrm{i}$.

解　先计算 I_1，

$$I_1 = \int_0^1 x \mathrm{d}x + \int_0^1 \mathrm{i} \mathrm{d}y = \frac{1}{2} + \mathrm{i}.$$

再计算 I_2，

$$I_2 = \int_0^1 0 \cdot \mathrm{d}y + \int_0^1 x \mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

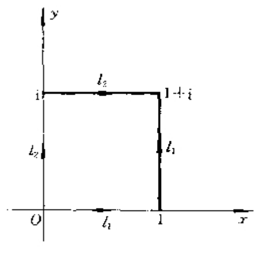

图 2-2

可见，一般地复变函数的积分与路径有关．函数 $f(z) = \mathrm{Re} z = x$ 的显著特征之一是它不是解析函数．可以猜测，解析函数的积分与路径可能无关．下节将证明此结论．