§2.2 Cauchy 定理

本节讨论复变函数的积分与积分路径的关系，寻求积分与路径无关的条件—Cauchy 定理.

2.2.1 单通区域的 Cauchy 定理

1. 单通区域

①. 围线：如果逐段光滑曲线 ℓ 的方程 $z = z(t)(\alpha \le t \le \beta)$ 满足 $z(\alpha) = z(\beta)$，且当 $\alpha < t_1, t_2 < \beta, t_1 \ne t_2$ 时 $z(t_1) \ne z(t_2)$，则称 ℓ 为简单闭曲线，也称围线. 对于围线，我们如此规定其它的方向：当观察者绕围线环行时，如围线内部在观察者的左方，则规定该环行方向为此围线的正方向，反之，就规定为负向.

②. 设 ℓ 为区域 B 内的一围线，如果 ℓ 上的所有点都含于 B 内，则称 B 为单连通区域.

2.2.2 单通区域的 Cauchy 定理

①. Cauchy 定理：设函数 $f(z)$ 在单通区域 $\overline{B}$ 内解析，ℓ 为 $\overline{B}$ 内任一围线（含 $\overline{B}$ 的边界），则复函数沿 ℓ 的闭路积分为零，即

$$\oint_\ell f(z)\mathrm{d}z = 0. \tag{2.2-1}$$

②. 证明：设

$$f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y), \qquad z = x + \mathrm{i}y.$$

由式(2.1-2)有

$$\oint_\ell f(z)\mathrm{d}z = \oint_\ell u(x,y)\mathrm{d}x - v(x,y)\mathrm{d}y$$
$$+\mathrm{i}\oint_\ell v(x,y)\mathrm{d}x + u(x,y)\mathrm{d}y.$$

由 Green 公式

$$\oint_\ell P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{2.2-2}$$

有

$$\oint_\ell f(z)\mathrm{d}z = \iint_S -\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \mathrm{i}\iint_S \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

由 C-R 条件，

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

得

$$\oint_\ell f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

③. 单通区域的 Cauchy 定理可以推广到：如果函数 $f(z)$ 在单通区域 B 上解析，在闭单通区域 $\overline{B}$ 上连续，则沿 $\overline{B}$ 上任一围线 ℓ 的积分为零，即

$$\oint_\ell f(z)\mathrm{d}z = 0$$

2.2.3 复通区域的 Cauchy 定理

1. 复通区域

①. 奇点：如果函数 $f(z)$ 在某点（或子区域）上不解析（不可导或不连续或没有定义），这样的点（子区域）称为奇点. 如果 $f(z)$ 在奇点 z_0 的某个去心邻域内是解析的，则称奇点 z_0 为孤立奇点.

②. 复通区域：在区域 B 内，如果任一围线内有不属于该区域的点，该区域就称为复通区域.

③. 区域境界线正方向的规定：同围线正方向的规定，即观察者沿正方向行进时，区域总是在观察者的左边.

2. 复通区域的 Cauchy 定理

①. Cauchy 定理：如果 $f(z)$ 是闭复通区域上的单值解析函数，则 $f(z)$ 沿区域外境界线 ℓ 的正方向积分与 $f(z)$ 沿所有内境界线

$\ell_i, (i = 1, 2, \cdots, n)$ 的正方向的积分之和为零，即

$$\oint_{\ell} f(z)\mathrm{d}z + \sum_{i=1}^{n} \oint_{\ell_i} f(z)\mathrm{d}z = 0. \tag{2.2-3}$$

对图示区域，有

②. 证明：思路是

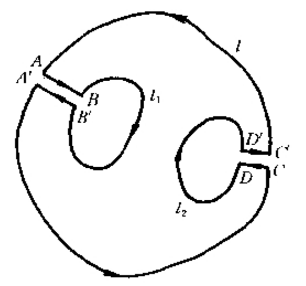

图 2-3

- 作割线连接区域外境界线与所有内境界线，复通区域变为单通区域；
- 由单通区域的 Cauchy 定理，结合沿同一割线的两边缘上的积分反向异号相互抵消，即得证.

$$\oint_{\ell} f(z)\mathrm{d}z + \int_{AB} f(z)\mathrm{d}z + \oint_{\ell_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{B'A'} f(z)\mathrm{d}z$$
$$+ \int_{CD} f(z)\mathrm{d}z + \oint_{\ell_2} f(z)\mathrm{d}z + \int_{D'C'} f(z)\mathrm{d}z + \cdots = 0.$$

其中，沿同一割线两边缘的积分值相互抵消，有

$$\oint_{\ell} f(z)\mathrm{d}z = -\sum_{i=1}^{n} \oint_{\ell_i} f(z)\mathrm{d}z,$$

③. Cauchy 定理可以改写为：

$$\oint_{\ell} f(z)\mathrm{d}z = \sum_{i=1}^{n} \oint_{\ell_i} f(z)\mathrm{d}z,$$

即沿内外境界线逆时针方向的积分和相等.

3. Cauchy 定理的结论

1 闭单通区域上的解析函数沿境界线的积分为零；

2 闭复通区域上的解析函数沿所有内外境界线正方向的积分和为零；

3 闭复通区域上的解析函数沿外境界线逆时针方向积分等于沿所有内境界线逆时针方向的积分之和；

4 对于任一闭单通或闭复通区域上的解析函数，只要起点和终点固定不变，当积分路径连续变形（不跳过 " 孔 " ）时，函数积分不变—围线变形原理.