# §2.3 不定积分

根据柯西定理，若函数 $f(z)$ 在单通区域 $B$ 上解析，则沿 $B$ 上任一路径 $\ell$ 的积分 $\int_\ell f(z)\mathrm{d}z$ 的值只跟起点和终点有关，而与路径无关．因此当起点 $z_0$ 固定时，这个不定积分就定义了一个单值函数，记作

$$F(z) = \int_\ell f(\zeta)\mathrm{d}\zeta.$$

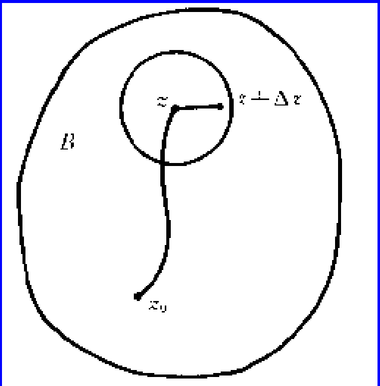

图 2-4

因此，我们可以有类似于一元微积分中的结论：

定理：设

(1) $f(z)$ 在单通区域 $B$ 内连续；

(2) $f(z)$ 沿区域 $B$ 内任意围线的积分值为零，则函数

$$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta, \qquad (z_0\in B). \tag{2.3-4}$$

在 $B$ 内解析，且 $F'(z)=f(z), z_0\in B$.

如果在区域 $B$ 内成立 $\Phi'(z)=f(z)$，则称 $\Phi(z)$ 为 $f(z)$ 的一个原函数．因此 $F(z)$ 就是 $f(z)$ 的一个原函数．类似于一元实变函数微积分学中的 Newton-Leibniz 公式的证明，可以得到与实变函数中的 Newton-Leibniz 公式类似的解析函数的积分计算公式

$$\int_{z_1}^{z_2} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta=F(z_2)-F(z_1), \qquad (z_1,z_2\in B). \tag{2.3-5}$$

## 2.3.1 例

例 1 计算积分 $\int_a^b z\sin z^2\mathrm{d}z$.

解：函数 $z\sin z^2$ 在 $z$ 平面上解析，易知 $-\frac{1}{2}\cos z^2$ 为它的一个原函数，所以

$$\int_a^b z\sin z^2 \mathrm{d}z = -\frac{1}{2}\cos z^2\,\Big|_a^b = \frac{1}{2}(\cos a^2 - \cos b^2).$$

例 2 计算积分

$$I = \oint_\ell (z-\alpha)^n \mathrm{d}z, \qquad (n\text{为整数}). \qquad (2.3\text{-}6)$$

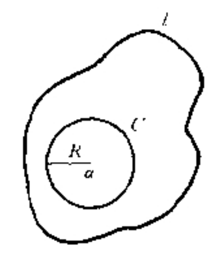

图 2-5

解：若回路 $\ell$ 不包围点 $\alpha$，则被积函数在 $\ell$ 所围区域上是解析的，按照 Cauchy 定理，积分值为零.

接着讨论 $\ell$ 包围 $\alpha$ 的情况．如 $n \le 0$，被积函数在 $\ell$ 所围区域上是解析的；如 $n < 0$，被积函数在 $\ell$ 所围区域中有一个奇点 $\alpha$，不管 $n \le 0$ 还是 $n < 0$，我们总可以把 $\ell$ 变形为以点 $\alpha$ 为圆心而半径为 $R$ 的圆周

$C$，$R$ 是相当任意的(图2—5). 在 $C$ 上，$z-\alpha=Re^{i\varphi}$，

$$I=\int_{\ell}(z-\alpha)\mathrm{d}z=\int_{\ell}R^n e^{in\varphi}\mathrm{d}(\alpha+Re^{i\varphi}$$

$$=\int_0^{2\pi}R^n e^{in\varphi}Re^{i\varphi}i\mathrm{d}\varphi$$

$$=iR_{n+1}\int_0^{2\pi}e^{i(n+1)\varphi}\mathrm{d}\varphi.$$

如果 $n\neq 1$，则

$$I=iR^{n+1}\frac{1}{i(n+1)}e^{i(n+1)\varphi}\Big|_0^{2\pi}=0.$$

如果 $n=-1$，则

$$I=i\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi=2\pi i.$$

其实，从原函数角度看，这个结果是很自然的. 如果 $n\neq -1$，$(z-z_0)^n$ 的原函数是单值函数 $(z-\alpha)^{n+1}/(n+1)$，绕 $\alpha$ 一周，原函数的改变量为零. 如 $z=-1,(z-\alpha)^{-1}$ 的原函数是多值函数

$\ln(z-\alpha)$ 的改变量为 $2\pi\mathrm{i}$.

总之

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{\ell}\frac{\mathrm{d}z}{z-\alpha}=\begin{cases}0, & (\ell\text{不包围}\alpha)\\ 1, & (\ell\text{包围}\alpha)\end{cases} \tag{2.3-7}$$

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{\ell}(z-\alpha)^n\mathrm{d}z=0, \qquad (n\neq -1) \tag{2.3-8}$$

式(2.3-7)和(2.3-8)很有用，从它们可以引出一系列重要结果，例如下节的 Cauchy 公式以及 §4.1 的留数定理.