§2.4 Cauchy 公式

2.4.1 Cauchy 公式

1. 内容

①. **定理**：设围线 ℓ 是闭单通区域 $\overline{B}$ 的境界线，函数 $f(z)$ 在 B 内解析，在 $\overline{B}$ 上连续，对 B 内任一点 α 有

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\ell \frac{f(z)}{z-\alpha}dz, \qquad \alpha \in B. \tag{2.4-1}$$

②. **证明**：由式(2.3-7)

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\ell \frac{dz}{z-\alpha} = 1$$

得

$$f(\alpha) = \frac{f(\alpha)}{2\pi i}\oint_\ell \frac{dz}{z-\alpha} = \frac{1}{2\pi i}\oint_\ell \frac{f(\alpha)}{z-\alpha}dz.$$

上式与 Cauchy 公式比较，可知只需证明

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\ell}\frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha}dz=0.$$

通常 $z=\alpha$ 是上式被积函数的奇点．以 $z=\alpha$ 为圆心，ε 为半径作小圆 C_ε，于是在 ℓ 及 C_ε 所围的复通区域上，被积函数是解析函数．由 Cauchy 定理，得

$$\oint_{\ell\text{逆向}}\frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha}dz=\oint_{C_\varepsilon\text{逆向}}\frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha}dz. \qquad (2.4\text{-}2)$$

上式两边取极限，有

$$\lim_{\varepsilon\to0}\oint_{\ell}\frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha}dz=\lim_{\varepsilon\to0}\oint_{\varepsilon}\frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha}dz.$$

由于上式左边与 ε 无关，而右边当 $\varepsilon\to0$ 时，$f(z)\to f(\alpha)$（$f(z)$ 连续)，故必有

$$\oint_{\ell}\frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha}dz=0.$$

③． Cauchy 公式的意义

由 Cauchy 公式可知，解析函数在区域内任一点的值可用沿境界线的闭路（围线）积分表示出来．借助此公式可计算围线积分．

④．Cauchy 公式的一般形式

由于 α 的任意性，为方便起见，长改用 z 表示，而用 ζ 表示积分变量，此时 Cauchy 公式为

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{\ell} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta. \tag{2.4-3}$$

⑤．复通区域的 Cauchy 公式

如果 $f(z)$ 在 ℓ 所围区域内有奇点，只要挖取奇点后的复通区域上 $f(z)$ 解析，此时 Cauchy 公式仍然成立．但应将 ℓ 理解为外境界线和所有内境界线之和，且其积分方向取正方向，即

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{\ell\text{逆向}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta + \sum_i \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{\ell_i\text{顺向}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta$$

⑥．无界区域的 Cauchy 公式

对 ℓ 以外（含无限远点）的区域，如果 $f(z)$ 解析，且 $f(z)_{z\to\infty}=0$，则可将上述围线 ℓ 所围内部区域的 Cauchy 公式推广，即

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\ell顺}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta+f(\infty), \tag{2.4-4}$$

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\ell顺}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta, \qquad f(\infty)=0. \tag{2.4-5}$$

证明：略.

⑦. Cauchy 公式的导数形式

由于在 Cauchy 公式中，z 为区域的内点，而 ζ 在境界线上，因此 $\zeta\neq 0$，所以 $f(\zeta)/(\zeta-z)$ 在区域内是解析函数（处处可导），可以求任意阶导数. 所以，有

$$f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\ell}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta, \tag{2.4-6}$$

$$f^{(n)} = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\ell} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta. \qquad (2.4\text{-}7)$$

2.4.2 Cauchy 公式的两个推论*

1 **模数定理**：如果 $f(z)$ 在闭区域 $\overline{B}$ 上解析，则 $f(z)$ 的模 $|f(z)|$ 只能在境界线上取极大值.

2 Livouville **定理**：如果 $f(z)$ 在全平面上解析，并且是有界的 ($|f(z)| = N$)，则 $f(z)$ 必然为常数.

作业(No.3)

P. 38：1；2

END