1 三章 幂级□展开

级□□研究解析函□ 一个重要工具. 将解析函□表□为级□不仅有理ØØ上 意义，而 也有□用意义，比如可利用级□计ŽŽ 函□近qq 值（截取幂级□ccc'面有• 可ŠŠ为函□ 近qq ˆ表ˆ □,' ' □取决于ˆ要ˆ 近qqŠŠÝÝ）‰解微分方ŠŠ .

我们将看 ，一个函□ 解析性与一个函□可否展开¤ 幂级□ 问KK □ 价 .| 这|，，一个侧面揭□ 解析函□ 本质，因dd 我们可以进一/步/ 认□解析函□.

本章研究复□' 级□和复变函□ 幂级□展开. ØØ于，些和□学分析中² 行 结ØØ，往往叙□而不证明.

§3.1 复□‘ 级□

3.1.1 复□‘ 级□

□有复□‘¡无¡ 级□

$$\sum_{k=1}^{\infty} w_k = w_1 + w_2 + \cdots + w_k + \cdots, \qquad (3.1\text{-}1)$$

$$w_k = u_k + \mathrm{i} v_k.$$

□(3.1-1)ccc‘ ħ‘ 之和为

$$\sum_{k=1}^{n} w_k = \sum_{k=1}^{n} u_k + \mathrm{i} \sum_{k=1}^{n} v_k,$$

|| 而

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} w_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k + \mathrm{i} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} v_k.$$

因ÆÆd ，复¤‘¡无¡ 级¤ ¤敛性问KK 归结为¤部和虚部 ¤敛性问KK．即

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \quad \text{and} \quad \sum_{k=1}^{\infty} v_k. \tag{3.1-2}$$

¤¤¤ 以，¤‘¤‘ 级¤ ı许ı 性质和规Æ可移植 复¤‘ 级¤æææ 面举而不证明一些西性质．

3.1.2 Cauchy ¤敛 据

1. Cauchy ¤敛 据

ØØØ 于任一给‰ 小正¤ ¤ ε，必有•N• 在，¤ $n > N$ ¤，

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} w_k\right| < \varepsilon.$$

¤中 p 为任意正整¤．这就¤ ¤敛¿¿¿ 要^ 件．

2. 绝ØØØ ▫敛

如果复ừ‘ 级▫ ▫(3.1-1) 构¤ 级▫

$$\sum_{k=1}^{\infty}|w_k| = \sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{u_k^2+v_k^2} \qquad (3.1\text{-}3)$$

▫敛,¡ ¡ 复ừ‘ 级▫(3.1-1)绝ØØØ ▫敛.

3. 绝ØØØ ▫敛级▫ AAA:

- 绝ØØØ ▫敛 复ừ‘ 级▫必然▫ ▫敛 ， 与级ừ各‘ kkk ggg 序无关.
- 两个绝ØØØ ▫敛 复ừ‘ 级▫¨之¨ ▫绝ØØØ ▫敛 ， 于两个级▫和¨之¨ .

□有两个绝ØØ □敛 复□‘ 级□

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k \quad \textbf{and} \sum_{k=1}^{\infty} q_k, \tag{3.1-4}$$

ƒƒƒ逐‘ ¦ ¦ ¦

$$p_1q_1 + (p_1q_2 + p_2q_1) + (p_1q_3 + p_2q_2 + p_3q_3) + \cdots . \tag{3.1-5}$$

3.1.3 一致□敛级□

AA 别?ØØ 复变‘ 级□

$$\sum_{k=1}^{\infty} w_{(}z)k = w_1(z) + w_2(z) + \cdots + w_k(z) + \cdots , \tag{3.1-6}$$

ÜÜ 每‘ □ z 函□ .

1. ‰义

ØØ 于复变‘ 级□(3.1-6)，如果在« 域 B（›‰›，，ℓ）上¤¤ 有

: : ，级□(3.1-6)□敛，¡则¡ 在 B（›‰›，，ℓ）上复变‘ 级□□敛.

2. 一致 绝ØØ □敛¿¿¿分必要^ 件

在 B（›‰›，，ℓ）上各: z，ØØ 于任一给‰ 小正□□ ε，必有 $N(z)$• 在，□ $n > N(z)$ □

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} w_k(z)\right| < \varepsilon,$$

□中 p 为任意正整□. 如果 $N(z)$ 跟 z 无关，¡则¡ 复变‘ 级□在 B（›‰›，，ℓ）上一致□敛.

3. 一致□敛 复变‘ 级□ 性质

- 如果在 B 上一致□敛 复变‘ 级□ ‘每ÑÑÑ □ B 上 连续函□，则级□和也□ B 上 连续函□.
- 在 ℓ 上一致□敛 复变‘ 级□ ‘每ÑÑ □ ℓ 上 连续函□，则级

□ 和也□ ℓ 上 连续函□， 级□可沿 ℓ 逐‘¨ ¨ 分.

✪ 如果，令«« 域 B（‹%‰›，， ℓ）上¤¤¤:有: z，复变‘ 级□ ‘各‘

$|w_k(z)| \le m_k$，而正~~‘ □‘ 级□ $\sum_{k=1}^{\infty} m_k$ □敛，则复变‘

级□在 B（‹%‰›，， ℓ）上绝ßß 一致□敛.