§3.2 幂级数

本节专门讨论各项都是幂函数的复变项级数.

3.2.1 幂级数

定义如下级数为以 z_0 为中心的幂级数:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots, \tag{3.2-1}$$

其中, $z_0, a_0, a_1, a_2, \cdots$ 都是复常数.

式(3.2-1)各项模构成正项级数

$$|a_0| + |a_1||(z-z-0)| + |a_2||(z-z_0)^2| + \cdots + |a_k||(z-z_0)^k| + \cdots \tag{3.2-2}$$

3.2.2 收敛圆和收敛半径

由判断正项级数的比值判别法—d'Alembert判别法, 或根值判别

法，能够确定级数(3.2-2)的收敛性.

1. 比值判别法

如果

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|a_{k+1}||z-z_0|^{k+1}}{|a_k||z-z_0|^k}=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right||z-z_0|$$

$$=\begin{cases}<1, & (3.2\text{-}2)\text{收敛，}(3.2\text{-}1)\text{绝对收敛,}\\ >1, & (3.2\text{-}2)\text{发散，}(3.2\text{-}1)\text{发散.}\end{cases}$$

令

$$R=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|, \tag{3.2-3}$$

则

$$|z-z_0|<R, \quad (3.2\text{-}2)\text{收敛，}(3.2\text{-}1)\text{绝对收敛,} \tag{3.2-4}$$

$$|z-z_0|>R, \quad (3.2\text{-}2)\text{发散，}(3.2\text{-}1)\text{发散.} \tag{3.2-5}$$

如以 R 半径（z_0 为圆心）作圆 C_R，则在圆内式(3.2-2)收敛，式(3.2-1)绝对收敛，在圆外式(3.2-2)和(3.2-1)均发散．这样的圆称为幂级数的收敛圆，半径 R 称为收敛半径．在圆周上，幂级数的收敛情况需要视具体情况具体分析．

3.2.3 根值判别法

如果

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k||z-z_0|^k}=\begin{cases}<1, & \text{(3.2-2)收敛，(3.2-1)绝对收敛,}\\ >1, & \text{(3.2-2)发散，(3.2-1)发散.}\end{cases}$$

相应地，收敛半径定义为

$$R=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}}. \qquad (3.2\text{-}6)$$

对于半径 $R_1 < R$ 的圆内，级数(3.2-1)绝对且一致收敛．

3.2.4 例

例 1 求幂级数 $1+t+t^2+\cdots+t^k+\cdots$ 的收敛圆，t 为复数.

解：由式(3.2-3)求收敛半径：

$$R=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|=1.$$

因此，收敛圆是以 $t=0$ 为圆心 $R=1$ 为半径的圆，收敛圆内部可以表示为 $|t|<1$.

此例的级数是几何级数，公比为 t，所以前 $n+1$ 项之和为

$$\sum_{k=0}^{n}k^k=1+t+t^2+\cdots+t^n=\frac{1-t^{n+1}}{1-t}.$$

因 $|t|<1$，则

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{k=1}^{n}t^k=\lim_{k\to\infty}\frac{1-t^{n+1}}{1-t}=\frac{1}{1-t}.$$

即在收敛圆内，幂级数的和为 $1/(1-t)$，

$$1+t+t^2+\cdots+t^k+\cdots=\frac{1}{1-t}, \qquad (|t|<1). \tag{3.2-7}$$

例 2 求幂级数 $1-z^2+z^4-z^6+\cdots$ 收敛圆，z 为复变数.

解：把 z^2 记作 t，级数和即!$1-t+t^2-t^3+\cdots$，系数交替为 ±1，应用式(3.2-3) 求 t 平面上的收敛半径

$$R=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|=1.$$

z 平面上的收敛半径为 R即 1．收敛圆的内部可以表述为 $|z|<1$.

本例也是几何级数，公比为 $-z^2$．在 $|z|<1$ 的条件下，容易求出这个几何级数的和为

$$1-z^2+z^4-z^6+\cdots=\frac{1}{1+z^2}, \qquad (|z|<1). \tag{3.2-8}$$

3.2.5 逐项积分和逐项求导

幂级数(3.2-1)在收敛圆内绝对且一致收敛，在一个稍微缩小的圆周 C_{R_1} 上一致收敛．因此，幂级数(3.2-1)可以沿 C_{R_1} 逐项积分和求导．

1. 积分

用 ζ 代替(3.2-1)的变量 z，其和用 $w(\zeta)$ 表示，则

$$w(\zeta) = a_0 + a_1(\zeta - z_0) + a_2(\zeta - z_0)^2 + \cdots . \tag{3.2-9}$$

用 $\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\zeta - z}$ 乘以上式两边，并沿 C_{R_1} 积分

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{R_1}} \frac{w(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{R_1}} \frac{a_0}{\zeta - z}d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{R_1}} \frac{a_1(\zeta - z_0)}{\zeta - z}d\zeta + \cdots$$

幂函数在 C_{R_1} 内是解析的，由 Cauchy 公式(2.4.3)，得

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{R_1}} \frac{w(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots$$

这是说，幂级数(3.2-1)的和可以表为连续函数的回赂积分，而连续函数的回路积分可在积分号下求导任意多次，亦即是解析函数．这样，幂级数的和在收敛园的内部是解析函数，在收敛圆内不可能有奇点．

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{R_1}} \frac{w(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$$

2. 导数

在收敛圆内，级数(3.2-1)是解析的，故可求导任意次（阶）

$$w^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_{C_{R_1}} \frac{w(\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}}d\zeta$$
$$= a_0^{(n)} + [a_1(z - z_0)]^{(n)} + [a_2(z - z_0)^2]^{(n)} + \cdots .$$

作业(No.4)

P. 38：1；2

P. 46：1；2；3(1)、3(3)、3(5)