§3.3 Taylor 级数展开

从 § 3.2 知道，幂级数之和在收敛圆内部为解析函数．那么反过来，任何一个解析函数是否可以表示成一个幂级数呢？这个问题不仅具有理论意义，而且很有使用价值．下面研究解析函数的幂级数展开问题．我们知道，任意阶导数都存在的实变函数可以展为泰勒级数．既然解析函数的任意阶导数都存在，自然可以期望把解析函数展为复变项的泰勒级数．

3.3.1 解析函数的 Taylor 展开定理

1. 定理

设 $f(z)$ 在以 z_0 为中心的圆 C_R 内解析，则对圆内的任意点 z，$f(z)$ 在 z_0 点可展开为幂级数

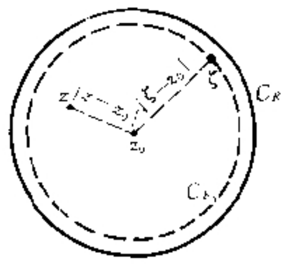

图 3-1

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k,$$

其中

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{R_1}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!},$$

C_{R_1} 为圆 C_R 内包含 z 且与 C_R 同心的圆.

2. 证明

如图所示，为了避免涉及泰勒级数在圆周 C_R 上的收敛或发散问题，作较 C_R 小，但包含 z 且与 C_R 同心的圆周 C_{R_1}. 应用 Cauchy 公式(2.4.1)有

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{R_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \tag{3.3-1}$$

把上式中的 $1/(\zeta - z)$ 展为以 z_0 为中心的幂级数．先改写为

$$\frac{1}{\zeta - z_0} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{\zeta-z_0}}. \qquad (3.3\text{-}2)$$

上式右边第二个因子与式(3.2-7)比较，有

$$\frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{\zeta-z_0}} = 1 + \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} + \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^2 + \cdots, \qquad \left(\left|\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right| < 1\right).$$

代入式(3.3-2)得

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^k}{(\zeta - z_0)^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^k}{(\zeta - z_0)^{k+1}} \qquad (3.3\text{-}3)$$

将式(3.3-3)代入(3.3-1)，并逐项积分，

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (z - z)^k \cdot \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{C_{R_1}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} \mathrm{d}\zeta.$$

由 Cauchy 公式(2.4.7)，上式就是以 z_0 为中心的 Taylor 级数

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k \qquad (|z-z_0|<R). \tag{3.3-4}$$

可以证明，以 z_0 为中心的 Taylor 级数(3.3-4)是唯一的．如果另有一个以 z_0 为中心的不同于(3.3-4)的 Taylor 级数

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-z_0)^k, \tag{3.3-5}$$

则有

$$\begin{aligned}&a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\cdots\\ &=f(z_0)+\frac{f'(z_0)}{1!}(z-z_0)+\frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2+\cdots.\end{aligned} \tag{3.3-6}$$

令(3.3-6)中的 $z=z_0$，得

$$a_0=f(z_0)$$

对(3.3-6)分别求导一次和而次，并令 $z = z_0$，得

$$a_1 = \frac{f'(z_0)}{1!}, \qquad a_2 = \frac{f''(z_0)}{2!}.$$

依此类推，就可看出展开式(3.3-5)和(3.3-4)完全相同.

幂级数在收敛圆内其和是解析函数，且可展开为唯一的 Taylor 级数. 因此，Taylor 级数与解析函数有着密切的关系.

3.3.2 例

例 1 在 $z_0 = 0$ 的邻域上把 $f(z) = e^z$ 展开.

解：函数 $f(z) = e^z$ 的各阶导数 $f^{(k)}(z) = e^z$，且

$$f^{(k)}(z_0) = f^{(k)}(0) = 1.$$

根据式(3.3-4)可以写出 e^z 在 $z_0 = 0$ 的邻域上的 Taylor 级数

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots + \frac{z^k}{k!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}. \tag{3.3-7}$$

应用(3.2-3)求得此 Taylor 级数的收敛半径为无限大，即只要 z 是有限的，Taylor 级数(3.3-7) 就收敛.

例 2 在 $z_0 = 0$ 的邻域上把 $f_1(z) = \sin z$ 和 $f_2(z) = \cos z$ 展开.

解：函数 $f(z) = \sin z$ 的前四阶导数是

$f_1'(z) = \cos z$, $f_1''(z) = -\sin z$, $f_1^{(3)}(z) = -\cos z$, $f_1^{(4)}(z) = \sin z$. $f_1^{(4)}(z)$ 正好是 $f_1(z)$ 本身，所以更高阶的导数不过是前四阶的重复.

在 $z_0 = 0$ 时，$f_1(z)$ 和前四阶导数的值是

$f - 1(0) = 0$, $f_1'(0) = 1$, $f_1''(0) = 0$, $f_1^{(3)}(0) = -1$, $f_1^{(4)}(0) = 0$.

按照式(3.3-4)可以看出 $\sin z$ 在 $z_0 = 0$ 的邻域上的 taylor 级数

$$\sin z = \frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}. \qquad (3.3\text{-}8)$$

应用式(3.2-3)求得此 Taylor 级数的收敛半径也为无限大.

同理可得 $\cos z$ 在 $z_0 = 0$ 的邻域上的 Taylor 级数

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}. \tag{3.3-9}$$

其收敛半径也为无限大.

总之，将复变函数展开为级数的方法可分为两类：

- **直接用 Taylor 展开定理；**
- **间接展开.**