§3.4 解析延拓

前两节已经知道，复变函数的幂级数展开式的成立是有条件的，即仅在收敛圆内有效．然而，函数常常在更大范围内解析，在较小区域上两者相同．细看(3.2-7)，(3.2-8)，(3.3.10)和(3.3.11)几个式子．这些式子后面的括号里注明成立条件．假如取消所注的条件，则等号两边并不完全是一回事．例如，(3.2-8)的左边是幂级数 $1 - z^2 + z^4 - z^6 + \cdots$，它在单位圆 $|z| = 1$ 内部收敛，其和是解析函数，但如超出单位圆，级数就发散而无意义；右边是 $1/(1 + z^2)$．它在除去 $z = \pm i$ 的全平面上是解析函数．这样，我们有两个函数，其一

$$f(z) = \frac{1}{1 + z^2}$$

$$= 1 - z^2 + z^4 - z^6 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^{2k}, \quad (|z| < 1). \qquad (3.4\text{-}1)$$

左边仅在 $|z| < 1$ 上是解析的，而右边

$$F(z) = \frac{1}{1+z^2}, \qquad (\text{除} z = \pm \mathrm{i} \text{以外}). \tag{3.4-2}$$

则在较大的区域上是解析的，并且两者在较小的区域上等同.

问题：已给某个区域 b 上的解析函数 $f(z)$，是否能找出另一函数 $F(z)$，它在含有区域 b 的一个较大的区域 B 上是解析函数，而且在区域 b 上等同于 $f(z)$? 这个问题叫作解析延拓. 简单地说，解析延拓就是解析函数定义域的扩大.

3.4.1 解析延拓

1. 解析延拓的普遍方法—Taylor 级数法

从原则上说，解析延拓总可以利用 Taylor 级数进行. 具体地说，选取区域 b 的任一内点 z_0，在 z_0 的邻域上把解析函数 $f(z)$ 展开为 Taylor 级数. 如果这个 Taylor 级数的收放圆有一部分超出 b 之外，解

析函数 $f(z)$ 的定义域就扩大了一步．这样一步又一步，定义域逐步扩大．

2. 解析延拓的特殊方法

利用 Taylor 级数进行解析延拓虽然是个普通方法，但具体用起来计算根繁，所以通常总是尽量利用一些特殊方法，例如(3.4-2)就是(3.4-1)的解析延拓．不管用哪种方法进行解析延拓都可以，因为解析延拓是唯一的．关于这个唯一性，下面给出简单的论证．

3.4.2 解析延拓唯一性的证明

$f(z)$ 是区域 b 上的解析函数，用两种方法把 $f(z)$ 解析延拓到含有区域 b 的一个较大的区域 B 上．假定从两种方法得到的解析函数是不同的，分别为 $F_1(z)$ 和 $F_2(z)$．在区域 b 上，$F_1(z)$ 和 $F_2(z)$ 各自等同于 $f(z)$，因而 $F_1(z)-F_2(z)$ 在 b 上处处为零．这样，函数 $F_1(z)-F_2(z)$

是区域 B 上的解析函数而且并非处处为零，但在区域 B 的一个子区域 b 上却是处处为零(图3－2)．选取 b 的境界线上一点 z_0，图中用虚线标明 z_0 的一个邻域，这邻域的一部分 α 属于 b，另一部分 β 则不属于 b．于是，按照上述假定，函数 $F_1(z) - F_2(z)$ 在 α 上处处为零，在 β 上并非处处为零（否则就把 β 并入 b）．以 z_0 为中心把解析函数 $F_1(z) - F_2(z)$ 展开为 Taylor 级数

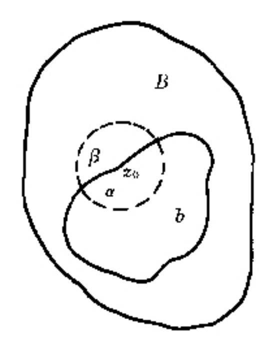

图 3-2

$$F_1(z) - F_2(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots + a + k(z - z_0)^k + \cdots .$$

设这些系数中第一个不为零的是 a_m (m 是有限的)，即

$$F_1(z) - F_2(z) = (z - z_0)^m[a_m + a_{m+1}(z - z_0) + a_{m+2}(z - z_0)^2 + \cdots]. \qquad (3.4\text{-}3)$$

对于点 z_0 的紧邻 z 而言，$|z-z_0|$ 很小，因而(3.4-3)的 [ ] 中以 a_m 为最重要，即 $[a_m+a_{m+1}(z-z_0)+a_{m+2}(z-z_0)^2+\cdots]\approx a_m$，从而

$$F_1(z)-F_2(z)\approx(z-z_0)^m a_m\neq 0.$$

这就是说，$F_1(z)-F_2(z)$ 不可能在 α 上处处为零．这样，在 α 上处处为零要求所有系数 $a_0,a_1,a_2,\cdots,a_k,\cdots$ 无一例外都是零．但如果所有系数全为零，势必使 $F_1(z)-F_2(z)$ 在 β 上也处处为零．这与原来的假设是矛盾的．总之，区域 B 上的解析函数

$$F_1(z)-f_2(z)$$

在子区域 b 上处处为零，必须在整个区域 B 上处处为零．即，用两种方法进行解析延拓得到的 $F_1(z)$ 和 F_2z 是完全等同的，即解析延拓是唯一的．

作业(No.5)

P. 52: (4)、(5)

END