§3.5 Laurant 级数

当所研究的区域上存在函数的奇点时，就不再能将函数展开成 Taylor 级数，而需要考虑在除去奇点的环域上的展开．这就是本节所要讨论的 Laurant 级数展开．

首先简单介绍一下含有正、负幂项的幂级数，所谓双边幂级数．

3.5.1 双边幂级数

双边幂级数定义为

$$\cdots + a_{-2}(z-z_0)^{-2} + a_{-1}(z-z_0)^{-1} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-z_0)^k. \tag{3.5-1}$$

1. 正幂部分

假设其正幂部分的收敛半径为 R_1.

2. 负幂部分

引用新的变量重新表示负幂部分.令

$$\zeta = \frac{1}{z - z_0}$$

则

$$\sum_{k=-\infty}^{-1} a_k(z - z_0)^k = a_{-1}\zeta + a_{-2}\zeta^2 + a_{-3}\zeta^3 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k}\zeta^k \qquad (3.5\text{-}2)$$

设幂级数(3.5-2)的收敛半径为 $\frac{1}{R_2}$.则它在 $|\zeta| < 1/R_2$ 内收敛,即在 $|z - z_0| > R_2$ 外收敛.

3. 双边幂级数的收敛性

① 当 $R_2 < R_1$ 时,(3.5-1)在 $R_2 < |z - z_0| < R_1$ 内绝对且一致收敛,和为解析函数,可逐项求导和积分.

环域 $R_2 < |z - z_0| < R_1$ 称为级数(3.5-1)的收敛环.

② 当 $R_2 > R_1$ 时,(3.5-1)处处发散.

3.5.2 环域上单值解析函数的 Laurant 展开定理

1. 定理

如果函数 $f(z)$ 是环域 $R_2 < |z - z_0| < R_1$ 内的单值解析函数,则对环域内任意一点 z, $f(z)$ 可在 z_0 点展开为 Laurant 级数

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \qquad (3.5\text{-}3)$$

$$a_k = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C\text{逆}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta. \quad (3.5\text{-}4)$$

式(3.5-4)中,C 为环域内(绕内环)的沿逆事针方向的任意围线.

2. 证明

为避免涉及在圆周上函数的解析性及级数的收敛性问题,将外圆稍稍缩小为 C'_{R_1}, 内圆稍稍扩大为 C'_{R_2}, (图3—3), 应用复通区域上的 Cauchy 公式

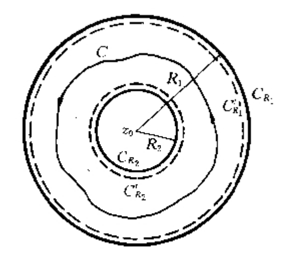

图 3-3

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C'_{R_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\oint_{C'_{R_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (3.5\text{-}5)$$

下面将 $\frac{1}{\zeta - z}$ 展为幂级数.对于沿 C'_{R_1} 的积分,可象(3.3-3)那样展开 $\frac{1}{\zeta - z}$,

$$\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^k}{(\zeta - z_0)^{k+1}}. \quad (3.5\text{-}6)$$

对于沿 C'_{R_2} 的积分,考虑到 $|z-z_0|<|\zeta-z_0|$,改按以下方式将 $\frac{1}{\zeta-z}$ 展开,

$$\frac{1}{\zeta}=\frac{1}{(\zeta-z_0)-(z-z_0)}=-\frac{1}{z-z_0}\frac{1}{1-\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}}$$

$$=-\frac{1}{z-z_0}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(\zeta-z_0)^l}{(z-z_0)^l}=-\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(\zeta-z_0)^l}{(z-z_0)^{l+1}}. \qquad (3.5\text{-}7)$$

把(3.5-6)和(3.5-7)分别代入(3.3-5)右边的两个积分,并逐项积分

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}(z-z_0)^k\cdot\frac{1}{2\pi i}\oint_{C'_{R_1}}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}d\zeta$$

$$-\sum_{l=0}^{\infty}(z-z_0)^{-(l+1)}\cdot\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{R_1}}(\zeta-z_0)^l f(\zeta)d\zeta.$$

在上式右边第二部分之中，改用 $k=-(l+1)$ 代替 l 作为求和指标，并根据 Cauchy定理(2-2-4) 把积分回路改为 C'_{R_1}，即得

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k(z-z_0)^k, \tag{3.5-8}$$

$$a_k=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{C'_{R_1}}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}\mathrm{d}\zeta$$
$$=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_{C}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}\mathrm{d}\zeta. \tag{3.5-9}$$

C 为环域内沿逆时针方向绕内圆一周的任一闭回线．(3.5-3)称为 $f(z)$ 的Laurant 展开，其右端的级数称为 Laurant 级数．

3.5.3 关于 laurant 级数的几点说明

1 尽管(3.5-3)的级数中含有 $z-z_0$ 的负幂项，而这些项在 $z=z_0$ 时都是奇异的，但点 z_0 可能是也可能不是函数 $f(z)$ 的奇点(参看下

面的例子).

2 尽管求展开系数 a_k 的公式(3.5-4)与 Taylor 展开系数 a_k 的公式形式相同，但这里的 $a_k \neq f^{(k)}(z_0)/k!$，不论 z_0 是否为 $f(z)$ 的奇点. 如果 z_0 是 $f(z)$ 的奇点，则 $f^{(k)}(z_0)$ 根本不存在；如果 z_0 不是奇点，则 $f^{(k)}(z_0)$ 存在，但 a_k 还是不等于 $f^{(k)}(z_0)/k!$. 因为 $f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}d\zeta$ 成立的条件是在以 C 为边界的区域上 $f(z)$ 解析，而对于现在所讨论的情况，这区域上有 $f(z)$ 的奇点(若无奇点就无需考虑 Laurant 展开了).

3 如果只有环心 z_0 是 $f(z)$ 的奇点，则内圆半径可以任意小，同时 z 可以无限地接近 z_0 点，这时称(3.5-3)为 $f(z)$ 在它的孤立奇点 z_0 的邻域内的 Laurant 展开式. 这是特别重要的一种情形，§3.6 将用它研究函数在其孤立奇点附近的性质.

同 Taylor 展开一样，Laurant 展开也是唯一的(证明从略). 展开的唯一性使得可用各种不同的办法求得环域上解析函数的 Laurant 展开式.

3.5.4 举例

例1 在 $z_0 = 0$ 的邻域上把 $(\sin z)/z$ 展开.

解: 函数 $(\sin z)/z$ 在原点没有定义,$z_0 = 0$ 是奇点.引用 $\sin z$ 在原点的邻域上的展开式(3.3-8),有

$$\sin z = \frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots, \quad (|z| < \infty).$$

为了避开奇点,从复平面挖去原点.在挖去原点的复平面上,用 z 遍除 $\sin z$ 的展开式,就得 $(\sin z)/z$ 的展开式

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \cdots, \quad (0 < |z| < \infty). \tag{3.5-10}$$

其实,如果定义一个函数 $f(z)$,

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{\sin z}{z}, & (z\neq 0),\\ \lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin z}{z}=1, & (z=0).\end{cases}$$

则 $f(z)$ 在整个开平面上是解析的. 从(3.5-10)直接得到 $f(z)$ 在 $z_0=0$ 的邻域上的展开式

$$f(z)=1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\frac{z^6}{7!}+\cdots,\quad (|z|<\infty). \tag{3.5-11}$$

(3.5-11)正是解析函数 $f(z)$ 的 Taylor 级数.

例 2 在 $1<|z|<\infty$ 的环域上将函数 $f(z)=1/(z^2-1)$ 展开为 Laurant 级数.

解: 先将函数整理

$$f(z)=\frac{1}{z^2-1}=\frac{1}{z^2}\frac{1}{1-\frac{1}{z^2}}=\frac{1}{z^2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z^2}\right)^k$$

$$= \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^6} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} z^{2k+2}.$$

展开式中出现无限多个负幂次项，但展开中心 $z = 0$ 本身却不是函数的奇点(奇点在 $z = \pm 1$).

例 3 在 $z = l$ 的邻域上格函数 $f(z) = 1/(z^2 - 1)$ 展为 Laurant 级数.

解: 先把 $f(z)$ 分解为分项公式

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z+1)} = \frac{1}{2}\frac{1}{z-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{z+1}$$

第二项只有一个奇点 $z = -1$，因此，在 $z_0 = 1$ 的邻域 $|z - 1| < 2$ 上可以展为泰勒级数. 利用(3.2-7)

$$\frac{1}{1+z^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^{2k}$$

即得

$$\frac{1}{2}\frac{1}{z-1} = \frac{1}{2}\frac{1}{(z-1)+2} = \frac{1}{4}\frac{1}{1+(z-1)/2}$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{z-1}{2}\right)^k, \qquad (|z-1|<2).$$

于是

$$\frac{1}{z^2-1} = \frac{1}{2}\frac{1}{z-1} - \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{2^{k+2}}(z-1)^k, \qquad (0<|z-1|<2).\tag{3.5-12}$$

这个展开式出现了 -1 次幂项.

例 4 在 $z_0 = 0$ 的邻域上把 $e^{\frac{1}{z}}$ 展开.

解: 引用 e^z 在原点邻域上的展开式(3.3-7)

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k, \qquad \left(\left| \frac{1}{z} \right| < \infty \right).$$

把 z 换为 $1/z$ 即得

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{z} \right)^k$$

$$= 1 + \frac{1}{1!}\frac{1}{z} + \frac{1}{2!}\frac{1}{z^2} + \frac{1}{3!}\frac{1}{z^3} + \cdots \qquad \left(\left| \frac{1}{z} \right| < \infty \right).$$

即

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{k=-\infty}^{0} \frac{1}{(-k)!} z^k, \qquad (0 < |z|). \tag{3.5-13}$$

这个展开式出现无限多负幂项.

例 5 在 $z_0 = 0$ 的邻域上把 $e^{\frac{1}{2}x\left(z-\frac{1}{z}\right)}$ 展开.

解：由(3.3-7)和(3.5-13)得绝对收敛级数

$$e^{\frac{1}{2}xz} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!}\left(\frac{1}{2}xz\right)^l, \qquad (|z| < \infty), \tag{3.5-14}$$

$$e^{-\frac{1}{2}x\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(-\frac{1}{2}x\frac{1}{z}\right)^n, \qquad (0 < |z|). \tag{3.5-15}$$

绝对收敛级数(3.5-14)和(3.5-15)可以逐项相乘，乘积中既有无限多正幂项，又有无限多负幂项．为得到乘积中某个正幂 $z^m(m > 0)$ 项，应取(3.5-15)所有各项而分别用(3.5-14)中的 $l = n + m$ 项去乘．为得到乘积中某个负幂 $z^{-h}(h > 0)$ 项，应取(3.5-14)所有各项而分别用(3.5-15)中的 $n = l + h$ 项去乘．这样，

$$e^{\frac{1}{2}x\left(z-\frac{1}{z}\right)} = \sum_{m=0}^{\infty}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(m+n)!n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+2n}\right] z^m$$

$$+\sum_{h=1}^{\infty}\left[(-1)^h\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l}{l!(l+h)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{h+2l}\right]z^{-h},\qquad (0<|z|<\infty).$$

把 $-h$ 改作 m,l 改作 n,则

$$\begin{aligned}e^{\frac{1}{2}x\left(z-\frac{1}{z}\right)}=&\sum_{m=0}^{\infty}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(m+n)!n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+2n}\right]z^m\\&+\sum_{m=-1}^{-\infty}\left[(-1)^m\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(n+|m|)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{|m|+2n}\right]z^m,\\&(0<|z|<\infty).\end{aligned}\tag{3.5-16}$$

顺便说一说，(3.5-16)的[ ]里正是数学物理中常用到的 m 阶Bessel 函数人 $J_m(x)$ [参见 §11.2].因此(3.5-16)也可写成

$$e^{\frac{1}{2}x\left(z-\frac{1}{z}\right)}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}J_m(x)z^m.$$