§3.6 孤立奇点的分类

本节利用 Laurant 级数展开研究单值函数(或多值函数的单值分支)孤立奇点的分类及其性质.

3.6.1 孤立奇点

定义：函数 $f(z)$ 在 z_0 点不可导（连续或无定义），而在 z_0 的任意小邻域内除 z_0 外处处可导.

或：如果函数 $f(z)$ 在奇点 z_0 的某个去心邻域内是解析的.

非孤立奇点：如果在 z_0 的无论多么小的邻域内，总可以找到除 z_0 以外的不可导的点，则称 z_0 为 $f(z)$ 的非孤立奇点.

3.6.2 孤立奇点的分类

方法：在挖去奇点的环域上，解析函数 $f(z)$ 可展开为 Laurant 级数

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k. \tag{3.6-1}$$

我们把式中的正幂和负幂部分分别称为：

- **解析部分：正幂部分**
- **主要部分或无限部分：负幂部分**

留数：$(z - z_0)^{-1}$ 项的系数，即 a_{-1} 称为 $f(z)$ 在 z_0 点的留数或残数.

依据：视负幂次项是无、有限项、无限项分类．在挖去孤立奇点 z_0 而形成的环城上的解析函数 $f(z)$ 的 Laurant 级数或无负幂项，或只有有限项，或有无限个负幂项，相应地分别把 z_0 称为函数 $f(z)$ 的可

去奇点、极点、本性奇点.

1. 可去奇点—Laurant 展开式无负幂项

当且仅当下列条件件满足时，z_0 称为 $f(z)$ 的<u>可去奇点</u>:

在以 z_0 为圆心，内半径为 0 的环域 $0 < |z - z_0| < R(\infty)$ 内的解析函数，可展开为 Laurant 级数

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \qquad 0 < |z - z_0| < R, \tag{3.6-2}$$

当 $z \to z_0$ 时

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0) = a_0, \tag{3.6-3}$$

即 $f(z)$ 在可去奇点的 z_0 的邻域内有界.

如果定义解析函数

$$g(z)=\begin{cases} f(z), & 0<|z-z_0|<R \text{ or } z\neq z_0 \\ a_0\quad, & z=z_0. \end{cases}$$

则 $g(z)$ 可展开为 Taylor 级数

$$g(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-z_0)^k,\qquad |z-z_0|<R.$$

就函数 $g(z)$ 而言，z_0 不再是奇点．这正是“可去奇点”一词的来历．可去奇点今后将不作为奇点看待．

2. 极点及其性质

当且仅当下列条件满足时，z_0 称为 $f(z)$ 的<u>极点</u>:

在以 z_0 为圆心，内半径为 0 的环域 $0 < |z - z_0| < R(\infty)$ 内的解析函数，可展开为 Laurant 级数

$$f(z) = \sum_{k=-m}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \qquad 0 < |z - z_0| < R, \tag{3.6-4}$$

当 $z \to z_0$ 时

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0) = \infty, \tag{3.6-5}$$

即 $f(z)$ 在极点的 z_0 的邻域内无界.

最低负幂次项的幂指数m 称为极点的阶，一阶极点简称单极点.

可以证明，如果函数 $f(z)$ 在环域 $0 < |z - z_0| < R$ 内可表示为

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m},$$

其中 $g(z)$ 为环域内的解析函数，且 $g(z) \neq 0$，则 z_0 是 $f(z)$ 的 m 阶极点.

或，当且仅当

$$h(z) = \frac{1}{f(z)}$$

以 z_0 为 m 阶零点（可去奇点当作解析点）时，z_0 为 $f(z)$ 的 m 阶极点.

3. 本性奇点及其性质

当且仅当下列条件满足时，z_0 称为 $f(z)$ 的本性奇点:

在以 z_0 为圆心，内半径为 0 的环域 $0 < |z - z_0| < R(\infty)$ 内的解析函数，可展开为 Laurant 级数

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \qquad 0 < |z - z_0| < R, \tag{3.6-6}$$

当 $z \to z_0$ 时 $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0) =$ 不确定，随趋于 z_0 的方式而定.

如，式(3.5.13)中，$z_0 = 0$ 是函数 $e^{1/z}$ 的本性奇点.

- 当 z 沿正实轴趋于零时，$1/z \to +\infty, e^{1/z} \to \infty$;
- 当 z 沿负实轴趋于零时，$1/z \to -\infty, e^{1/z} \to 0$;
- 当 z 按 $i2\pi n$(n 为自然数 $1, 2, 3, \cdots$)的序列趋于零时，$e^{1/z} = e^{-2\pi n i} = 1 \to 1$.

3.6.3 无限远点情形 *

以上所说的奇点均指有限远点，对无限远点也可以讨论奇点及其分类（不要求）.

如果函数 $f(z)$ 在无限远点的邻域 $\infty > |z| > R$ 上是解析的，则可在半径为 ∞ 的圆环域 $R < |z| < \infty$ (R 是某个有限数值)上展开为 Laurant 级数

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k, \qquad (R < |z| < \infty). \tag{3.6-7}$$

Laurant 级数(3.6.7)的负幂部分叫作解析部分，正幂部分叫作主要部分或无限部分.

- **如果 Laurant 级数(3.6.7)没有正幂项，就说函数 $f(z)$ 在无限远点是解析的.**
- **如果 Laurant 级数只有有限个正幂项，就把无限远点叫作 $f(z)$ 的极点，最高幂指数叫作极点的阶.**
- **如果 Laurant 级数有无限个正幂项，就把无限远点叫作 $f(z)$ 的本性奇点.**

其实，只要作变换 $\zeta = 1/z$，把 $z = \infty$ 变换为 $\zeta = 0$，从 ζ 平面的原点来看，这些定义都是显然的了.

但是 $f(z)$ 在无限远点的留数却定义为 z^{-1} 项（注意这属于解析部分而不属于主要部分）的系数 a_{-1} 反号即 $-a_{-1}$. 这是为了便于应用留数定理(参看(4.1.6)).

另外，多值函数的支点也是奇点，并可分类为：解析型、极点型和本性奇点型支点.

例：设函数 $f(z)$ 和 $g(z)$ 分别以点 z_0 为 m 阶和 n 阶极点．问对于下列函数而言，z_0 是何种性质的点？

(1) $f(z)g(z)$; (2) $f(z)/g(z)$; (3) $f(z)+g(z)$.

解：设

$$f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m};$$

$$g(z)=\frac{\psi(z)}{(z-z_0)^n}.$$

其中 $\varphi(z),\psi(z)$ 在 z_0 的邻域上解析（其级数只有正幂部分），且 $\varphi(z)\neq 0,\psi(z)\neq 0$，则

(1) $m+n$ 阶.

(2) $m>n$ 时，z_0 是 $m-n$ 阶极点；$m<n$ 时，z_0 不是奇点.

(3) 阶数为 $\max(m, n)$；如 $m = n$，则阶数可能 $< m(n)$.

作业(No.6)

P. 60：(1)、(5)、(7)

END