第四章 留数定理

留数在复变函数理论本身及实际应用中都ä 有重ロロロ．!本! 主θOO 绍留数概念、留数定理、留数计算及留数的应用．

§4.1 留数定理

由 Cauchy 定理可知，知道在区域 B)上) 析、在 $\overline{B}$ 上连续的函数 $f(z)$，对区域 $\overline{B}$ 的任▫围线 ℓ，

$$\oint_\ell f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

如果 B 内有奇点，则 Cauchy 定理不再有效. 如果 z_0 是 $f(z)$ 在 B 内的▫个孤立奇点，在除去奇点 z_0 的环域（邻域）上，$f(z)$ 可展开为 Laurant 级数

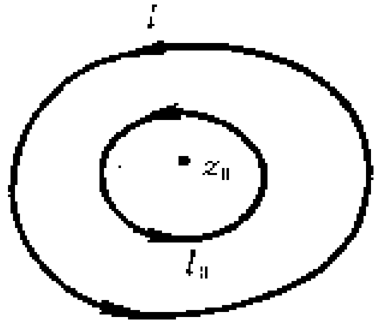

图 4-1

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z - z_0)^k. \tag{4.1-1}$$

见图示，在 z_0 点的邻域内任取▫包围 z_0 的小围线 ℓ_0（包含在 Laurant 级数(4.1-1)的收敛环中），由 Cauchy 定理

$$\oint_{\ell} f(z)\mathrm{d}z = \oint_{\ell_0} f(z)\mathrm{d}z.$$

代式(4.1-1)入上式，并利用积分公式(2.3.4)和(2.3.5)，即

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{\ell}(z-z_0)^k\mathrm{d}z = \begin{cases} 0, & k \neq -1 \\ 1, & k = -1 \end{cases}$$

得

$$\oint_{\ell} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}a_{-1}. \qquad (4.1\text{-}2)$$

式中，a_{-1} 为 Laurant 级数负□次幂项的系数，称为函数 $f(z)$ 在 z_0 点的留数（残数），记作 $\mathrm{Res}f(z_0)$ 或 $\mathrm{Res}[f(z), z_0]$. □此

$$\oint_{\ell} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}f(z_0). \qquad (4.1\text{-}3)$$

上面的(论可□推广到包含 n 个孤立奇点的情形．假设 ℓ 包含着 $f(z)$ 的 n 个孤立奇点 $b_1, b_2, \cdots, b_n$，作围线 $\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_n$ 分别包围点

$b_1, b_2, \cdots, b_n$，由 Cauchy 定理，有

$$\oint_\ell f(z)\mathrm{d}z = \oint_{\ell_1} f(z)\mathrm{d}z + \oint_{\ell_2} f(z)\mathrm{d}z + \cdots + \oint_{\ell_n} f(z)\mathrm{d}z.$$

将(4.1-2)代入上式，得

$$\oint_\ell f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}[\mathrm{Res}f(b_1) + \mathrm{Res}f(b_2) + \cdots + \mathrm{Res}f(b_n)]. \qquad (4.1\text{-}4)$$

4.1.1 留数定理

1. 留数定理

设函数 $f(z)$ 在围线 ℓ 所围区域 B 上除有限个孤立奇点 $b_1, b_2, \cdots, b_n$外）析，在闭区域 $\overline{B}$ 上除 $b_1, b_2, \cdots, b_n$外连续，则

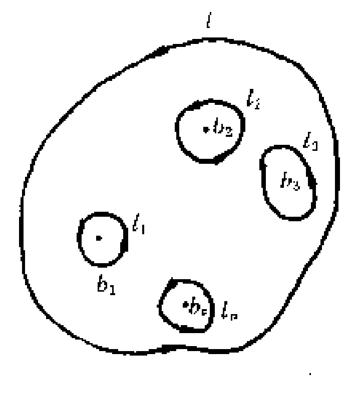

图 4-2

$$\oint_{\ell} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Res}f(b_j). \qquad (4.1\text{-}5)$$

2. □ □

求围线积分转化为求被积函数在围线所围区域内各孤立奇点的留数和.

3. 证明

思路：用复通区域的 Cauchy 定理 + 留数定□äää 体见上.

4. 留数定理可推广到无限远点的情形*

没函数 $f(z)$ 在无限远点的邻域上）析．我们来计算绕 ∞ 的正向围线积分 $\oint_{\ell} f(z)\mathrm{d}z$，在 ℓ □外的区域上没有 $f(z)$ 的有限远奇点．将

$f(Z)$ 在无限远的邻城上展为 Laurant 级数，并代人积分式，得

$$\oint_\ell f(z)\mathrm{d}z = \oint_\ell \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k \right) \mathrm{d}z.$$

除 $k = -1$ □ 项外，其余各项þ 为零，即

$$\oint_\ell f(z)\mathrm{d}z = -2\pi\mathrm{i}(-a_{-1}) = 2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}f(\infty). \qquad (4.1\text{-}6)$$

$-a_{-1}$ 被定□为 $f(z)$ 在无限远点的留数 $\mathrm{Res}f(\infty)$. 这□，留数定理对于无限远点□成立. 注□，即使无限远点不是奇点 $\mathrm{Res}f(\infty)$ □可□不为零.

有趣的是，如果 $f(z)$ 只有有限个奇点. 所有有限远的奇点必在某个圆的内部 $|z| < R$，让我们在圆环城 $R < |z| < \infty$ 内任取□个围线 ℓ，则由(4.1-5)，

$$\oint_\ell f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\left\{ f(z)\text{在所有有限远奇点的留数之和} \right\}.$$

上式与(4.1-6)式相加，得

$$0 = 2\pi \mathrm{i}\{\text{在所有各点的留数之和}\}. \tag{4.1-7}$$

即函数 $f(z)$ 在全平面上所有各点的留数之和为零．这里说的所有各点包括无限远点和有限远的奇点．

4.1.2 留数的计算

- □般方法：在孤立奇点的邻域上把函数展开为 Laurant 级数，取其负□次幂项的系数．本性奇点用此方法．
- 对极点：可不作 Laurant 级数展开而得到．下面ä 介0 绍．

1. m 极点的留数定理

- 定理

如果 z_0 是函数 $f(z)$ 的 m （级）极点，则

$$\operatorname{Res} f(z_0) = \frac{1}{(m-1)!}\left\{\lim_{z\to z_0}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}\left[(z-z_0)^m f(z)\right]\right\}. \qquad (4.1\text{-}8)$$

证明ä 有 m 极点的函数 $f(z)$ 可展开为 Laurant 级数

$$f(z) = a_m(z-z_0)^{-m} + \cdots + a_{-2}(z-z_0)^{-2} + a_{-1}(z-z_0)^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k. \qquad (4.1\text{-}9)$$

上式两边同乘□ $(z-z_0)^m$，得

$$(z-z_0)^m f(z) = a_{-m} + a_{-m+1}(z-z_0) + \cdots + a_{-1}(z-z_0)^{m-1} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^{k+m}. \qquad (4.1\text{-}10)$$

上式两边取极限，当 $z\to z_0$ 时，右边等于 a_{-m}，所□

$$\lim_{z\to z_0}\left[(z-z_0)^m f(z)\right] = a_{-m} = \text{非零有限值}. \qquad (4.1\text{-}11)$$

Ò这Ò 是判断 m 极点 数公式.

式(4.1-10)两边求 $m-1$ 导数后，有

$$\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}\{(z-z_0)^m f(z)\} = (m-1)!a_{-1} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(m+k)!}{(k+1)!}a_k(z-z_0)^{k+1}.$$

上式中令 $z \to z_0$，两端取极限，并除□ $(m-1)!$，得(4.1-8)，即

$$\mathrm{Res}f(z_0) = a_{-1} = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\left\{\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}\left[(z-z_0)^m f(z)\right]\right\}$$

由定理(4.1-8)，我们可□得到如下两个推论.

2. 推论□—□ （单）极点的留数

对于□ （单）极点，由定理(4.1-8)，得

$$\mathrm{Res}f(z_0) = a_{-1} = \lim_{z\to z_0}[(z-z_0)f(z)] = \text{非零有限值}. \quad (4.1\text{-}12)$$

上式既是判断 z_0 是否是函数 $f(z)$ 单极点的公式，□是计算函数 $f(z)$ 在单极点 z_0 的留数公式.

3. 推论二

设 $P(z), Q(z)$ 在点 z_0)) 析，且
$P(z_0) \neq 0$，$Q(z_0) = 0$，$Q'(z_0) \neq 0$（即 □ 零点），如果 z_0 是函数 $f(z) = P(z)/Q(z)$ 的 □ 极点，则

$$\operatorname{Res} f(z_0) = \lim_{z \to z_0} \left[(z - z_0) \frac{P(z)}{Q(z)} \right] = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}. \tag{4.1-13}$$

由推论 1 可 □ 立即得证.

$$\lim_{z \to z_0} \left[\frac{(z - z_0)P(z)}{Q(z)} \right] = \lim_{z \to z_0} \left[\frac{P(z) + (z - z_0)P'(z)}{Q'(z)} \right] = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$$

4.1.3 例题

例 1 求 $f(z) = 1/(z^n - 1)$ 在 $z_0 = 1$ 的留数.

))) ： 由于 $\lim_{z\to 1} f(z) = \infty$， □ 此 $z_0 = 1$ 是函数的极点．又 □ 为（利用(4.1-1)）

$$\lim_{z\to 1}\left[(z-1)\frac{1}{z^n-1}\right] = \lim_{z\to 1}\left[\frac{1}{z^{n-1}+z^{n-1}+\cdots+z+1}\right] = \frac{1}{n}$$

所 □ $z_0 = 1$ 是单极点．由单极点留数计算式(4.1-12)得

$$\text{Res} f(1) = \lim_{z\to 1}\left[(z-1)\frac{1}{z^n-1}\right] = \lim_{z\to 1}\left[\frac{1}{z^{n-1}+z^{n-1}+\cdots+z+1}\right] = \frac{1}{n}$$

另外，最简单的办法是使用(4.1-13)，

$$\text{Res} f(1) = \frac{1}{(z^n-1)'}\Big|_{z=z_0} = \frac{1}{nz^{n-1}}\Big|_{z=z_0} = \frac{1}{n}.$$

✪ 例 2 确定函数 $f(z) = 1/\sin z$ 的极点，求出函数在这些极点的留数．

))) ： 由于 $z \to n\pi$ (n 为整数，包括零)，有 $\sin z \to 0, f(z) \to \infty$，□ 此，$z_0 = n\pi$ 是极点．

$$\lim_{z\to n\pi}[(z-n\pi)f(z)] = \lim_{z\to n\pi}\frac{z-n\pi}{\sin z}$$

利用罗毕达法则，有

$$\lim_{z\to n\pi}[(z-n\pi)f(z)] = \lim_{z\to n\pi}\frac{1}{\cos z} = (-1)^n.$$

所 ▫ $z_0 = n\pi$ 是单极点. 函数 $f(z)$ 在单极点的留数等于

$$\mathrm{Res} f(n\pi) = \lim_{z\to n\pi}[(z-n\pi)f(z)] = (-1)^n.$$

例 3 确定函数 $f(z) = (z+2\mathrm{i})/(z^5+4z^3)$ 的极点，并求出函数在这些极点的留数.

))) ：先化简函数

$$f(z) = \frac{z+2\mathrm{i}}{z^3(z^2+4)} = \frac{z+2\mathrm{i}}{z^3(z+2\mathrm{i})(z-2\mathrm{i})} = \frac{1}{z^3(z-2\mathrm{i})}.$$

显然，$z_0 = 2\mathrm{i}$ 和 $z_0 = 0$ 是函数 $f(z)$ 的极点. ▫ 为 $z_0 = 2\mathrm{i}$ 和 $z_0 = 0$ 分别是分母 $z^3(n-2\mathrm{i})$ ▫ 和三零点，所 ▫ $z_0 = 2\mathrm{i}$ 和 $z_0 = 0$ 分别是函数的单极点和三 极点. 由留数计算式(??)，有

$$\mathrm{Res} f(2\mathrm{i}) = \lim_{z\to 2\mathrm{i}}\left[(z-2\mathrm{i})\frac{1}{z^3(z-2\mathrm{i})}\right] = \lim_{z\to 2\mathrm{i}}\frac{1}{z^3} = \frac{1}{-8\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{i}}{8},$$

$$\operatorname{Res} f(0) = \lim_{z\to 0}\frac{1}{2!}\left\{\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\left[z^3\frac{1}{z^3(z-2\mathrm{i})}\right]\right\}$$

$$= \lim_{z\to 0}\frac{1}{2!}\left\{\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\frac{1}{z-2\mathrm{i}}\right\} = \lim_{z\to 0}\left\{\frac{1}{(z-2\mathrm{i})^3}\right\} = \frac{\mathrm{i}}{8}.$$

可见，全平面上函数 $f(z)$ 所有极点的留数和为零

例 4 （P.71,1(1)）确定函数 $e^z/(1+z)$ 的奇点，并求出函数在各奇点的留数.

）））：(i) □ 为

$$\lim_{z\to -1}\left(\frac{e^z}{1+z}\right) = \infty,$$

所□ $z_0 = -1$ 是函数的极点. 又□

$$\lim_{z\to -1}\left[(1+z)\left(\frac{e^z}{1+z}\right)\right] = \lim_{z\to -1} e^z = \frac{1}{e},$$

这是非零有限值，所□ $z_0 = -1$ 是函数的□　极点（或称单极点），其留数Ò 是 $1/e$ ，即

$$\operatorname{Res} f(-1) = \frac{1}{e}.$$

(ii) □为

$$\lim_{z\to\infty}\left(\frac{e^z}{1+z}\right) \text{不存在,}$$

所□ $z_0 = \infty$ 是函数的本性奇点．函数在全平面上只有这两个奇点，由于全平面上所有奇点的留数之和为零，所□

$$\begin{aligned}\operatorname{Res} f(\infty) &= -\{f(z)\text{在所有（有限个）有限远奇点的留数之和}\}\\ &= -\operatorname{Res} f(-1) = -\frac{1}{e}.\end{aligned}$$

1 题其余各题　应作如此分析，但限于篇幅，我们只给出简$ 的步骤再Þ □例.

例 5 （P.71,1(2)）确定函数 $z/(z-1)(z-2)^2$ 的奇点，并求出函数在

各奇点的留数.

)))：(i) 单极点 $z_0 = 1$.

$$\operatorname{Res} f(1) = \lim_{z\to 1} \frac{z}{(z-2)^2} = 1.$$

(ii) 又二　极点 $z_0 = 2$,

$$\operatorname{Res} f(2) = \lim_{z\to 2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{z}{z-1}\right)$$
$$= \lim_{z\to 2}\left[\frac{1}{z-1} - \frac{z}{(z-2)^2}\right] = -1.$$

例 6 （P.71,2(1)）计算回路积分

$$\oint_{\ell} \frac{\mathrm{d}z}{(z^2+1)(z-1)^2}$$

ℓ的方程是 $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$.

)))：ℓ 的方程可化为：$(x-1)^2 + (y-1)^2 = (\sqrt{2})^2$，在复平面上，它是▫个▫$(1, i)$为圆心，$\sqrt{2}$为半»» 的圆.

被积函数 $f(z) = 1/(z^2+1)(z-1)^2$，它有两个单极点 $z_0 = \pm i$，和 □个二 极点 $z_0 = 1$，在这三个极点中，$z_0 = -i$ 不在积分回路内，只有极点 $z_0 = i$ 和 $z_0 = 1$ 在积分回路内，它们的留数分别为：

$$\operatorname{Res} f(i) = \lim_{z\to i} \frac{1}{(z+i)(1-z)^2} = \frac{1}{4},$$

$$\operatorname{Res} f(1) = \lim_{z\to 1} \frac{d}{dz}\frac{1}{1+z^2} = \lim_{z\to 1} \frac{-2z}{(1+z^2)^2} = -\frac{1}{2}.$$

应用留数定理：

$$\oint_{\ell} \frac{dz}{(z^2+1)(z-1)^2} = 2\pi i[\operatorname{Res} f(i) + \operatorname{Res} f(1)] = 2\pi i\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right] = -\frac{\pi i}{2}.$$

✪ 例 7 （P.71,2(2)）计算回路积分

$$\oint_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^3}\,dz.$$

）））：被积函数 $f(z)=\cos z/z^3$ 的三　极点 $z_0=0$ 在单为圆内，其留数为

$$\mathrm{Res}f(0)=\frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}(\cos z)=-\frac{1}{2},$$

所□

$$\oint_{|z|=1}\frac{\cos z\,\mathrm{d}z}{z^3}=2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}f(0)=-\pi\mathrm{i}.$$

✪ 例 8（P.71,3）应用留数定理计算回路积分 $\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_\ell\frac{f(z)}{z-\alpha}\mathrm{d}z$，函数 $f(z)$ 在 ℓ 所围区域上)是）析的，α 是该区域的□个内点.

）））：设被积函数 $g(z)=\frac{f(z)}{z-\alpha}$. □为 $f(z)$ 在 ℓ 所围区域内)是）析的，所□ $g(z)$ 在积分回路（即 ℓ 所围区域）内只有□个单极点 $z_0=\alpha$，而

$$\mathrm{Res}f(\alpha)=\lim_{z\to\alpha}\left[\frac{f(z)}{z-\alpha}(z-\alpha)\right]=f(\alpha),$$

所 ▫

$$\oint_\ell \frac{f(z)z}{z-\alpha}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}\,f(\alpha) = 2\pi\mathrm{i}f(\alpha),$$

于是

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_\ell \frac{f(z)}{z-\alpha}\,\mathrm{d}z = f(\alpha).$$

这正是柯西公式.

作 □ (No.7)

P. 71：1(1)、1(2)、1(6)、1(7)、1(10)；2(1)、2(2)；3