§4.2 应用留数定理计算实变函数的定积分

某些重要的实积分可用留数定理计算．为此需要将实积分与复变函数的围线积分联系起来．通常通过变数代换或添加辅助线把实定积分转化为复平面上的围线积分，由此可用留数定理计算之．

定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的积分区间 $[a,b]$ 可以看作是复数平面上的实抽上的一段 ℓ_1 (图4—3)．于是，或者利用自变致的变换把 ℓ_1 变换为某个新的复数平面上的回路，这样就可以应用留数定理了；或者另外补上一段曲线 ℓ_2，使 ℓ_1 和 ℓ_2 合成回路 ℓ，ℓ 包围着区域 B (图4—3)．把 $f(x)$ 解析延拓到闭区域 $\overline{B}$ (这个延拓往往只不过是把 $f(x)$ 改为 $f(z)$ 而已)，并拿它沿着 ℓ 积分，

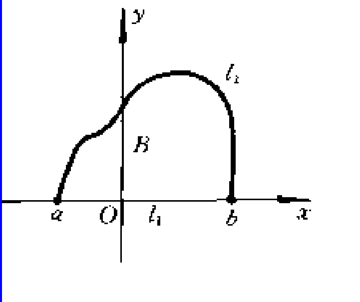

图 4-3

$$\oint_{\ell} f(z)\mathrm{d}z = \int_{\ell_1} f(x)\mathrm{d}x + \int_{\ell_2} f(z)\mathrm{d}z.$$

上式左边可以应用留数定理计算．右边第一个积分就是所求的定积分．如果右边第二个积分较易算出(往往是证明为零)或可用第一个积分表出，问题就解决了．

下面具体介绍几个类型的实变定积分．

4.2.1 类型一

$\int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x)\mathrm{d}x$，被积函数 $R(\cos x, \sin x)$ 是三角函数的有理式（在积分路径上无奇点），且在 $[0, 2\pi]$ 上连续．

作变数代换

$$z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}, \tag{4.2-1}$$

由

$$\cos x = \frac{1}{2}(z + z^{-1}), \quad \sin x = \frac{1}{2}(z - z^{-1}), \quad dx = \frac{1}{iz}dz, \tag{4.2-2}$$

有

$$I = \oint_{|z|=1} R\left(\frac{z + z^{-1}}{2}, \frac{z - z^{-1}}{2i}\right)\frac{dz}{iz}. \tag{4.2-3}$$

在实变数 x 从 0 变到 2π 的过程中，复变数 $z = e^{ix}$ 从 $z = 1$ 出发沿单位圆 $|z| = 1$ 逆时针走一圈又回到 $z = 1$，实变定积分化为复变回路积分，因此可用留数定理计算，即

$$I = \oint_{|z|=1} R\left(\frac{z + z^{-1}}{2}, \frac{z - z^{-1}}{2i}\right)\frac{dz}{iz} = 2\pi i \sum \text{所有奇点的留数和}.$$

✪ 例 1 计算 $I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1+\varepsilon\cos x}$, $(0 < \varepsilon < 1)$.

解：作式(4.2-1)的变数代换，并利用式(4.2-3)，得

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{dz/iz}{1 + \varepsilon\frac{z+z^{-1}}{2}} = \frac{2}{i}\oint_{|z|=1} \frac{dz}{\varepsilon z^2 + 2z + \varepsilon}.$$

上式右边的回路积分在上节例 4 已用留数定理算出为 $\pi\mathrm{i}/\sqrt{1-\varepsilon^2}$. 所以

$$I=\frac{2}{\mathrm{i}}\frac{\pi\mathrm{i}}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}=\frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}.$$

例 2 计算 $I=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1-2\varepsilon\cos x+\varepsilon^2}$, $(0<\varepsilon<1)$.

解：同例 1 的处理，有

$$I=\oint_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z/\mathrm{i}z}{1-\varepsilon(z+z_1)+\varepsilon^2}=\oint_{|z|=1}\frac{\mathrm{i}}{(\varepsilon z-1)(z-\varepsilon)}\mathrm{d}z.$$

这个回路积分的被积函数有两个单极点：$z_0=1/\varepsilon>1$ 和 $z_0=\varepsilon$. 前者在积分回路 $|z|=1$ 之外，因而不必考虑. 单极点： $z_0=\varepsilon$ 在 $|z|=1$ 之内，必须考虑. 运用(4.1-8)计算在 $z_0=\varepsilon$ 的留数

$$\lim_{z\to\varepsilon}\left[(z-\varepsilon)\frac{\mathrm{i}}{(\varepsilon z-1)(z-\varepsilon)}\right]=\lim_{z\to\varepsilon}\frac{\mathrm{i}}{\varepsilon z-1}=\frac{\mathrm{i}}{\varepsilon^2-1}.$$

由留数定理得

$$I=2\pi\mathrm{i}\frac{\mathrm{i}}{\varepsilon^2-1}=\frac{2\pi}{1-\varepsilon^2}.$$

4.2.2 类型二

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$，积分区间是 $(-\infty, +\infty)$，复变函数 $f(z)$ 在实轴上无奇点，在上半平面内除有限个奇点外处处解析；当 z 在上半平面和实轴上 $\to \infty$ 时，$zf(z)$ 一致地 $\to 0$.

如果 $f(x)$ 是有理函数 $\frac{P(x)}{Q(x)}$；上述条件意味着 $Q(x)$ 没有实零点，$Q(x)$ 的次数至少高于 $P(x)$ 两次.

此积分通常理解为如下极限

$$I = \lim_{\substack{R_1\to\infty \\ R_2\to\infty}} f(x)\mathrm{d}x \tag{4.2-4}$$

若极限存在的话，这一极限便称为反常积分 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 的值．当 $R_1 = R_2 \to \infty$ 时此极限存在的话，该极限便称为积分 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 的主值，记为

$$\mathscr{P}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\mathrm{d}x. \tag{4.2-5}$$

下面计算此积分主值．考虑图示积分路线，其中 C_R 是以原点为中心，R 为半径的在上半平面的半圆环，取 R 充分大，使得 $f(z)$ 在上半平面内所有奇点 z_i 都包含在积分路径 ℓ 内（$\ell = C_R + -R \to R$）．则

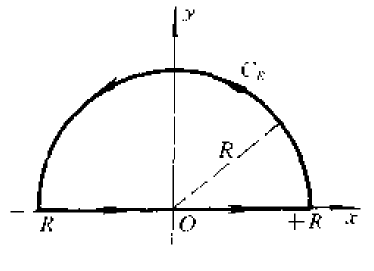

图 4-4

$$\oint_{\ell} f(z)\mathrm{d}z = \int_{-R}^{R} f(x)\mathrm{d}x + \int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z.$$

由留数定理

$$\int_{-R}^{R} f(x)\mathrm{d}x + \int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\{\ell\text{所围上半圆内所有奇点的留数和}\}.$$

显然，此等式不随 C_R 的半径增大而改变．

令 $R \to \infty$，上式右端不变（即上半平面所有奇点的留数和），左端第一个积分趋于所求积分，而第二个积分可以证明趋于零．于是

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\{f(z)l\text{在上半平面内所有奇点的留数和}\}. \quad (4.2\text{-}6)$$

例 3 计算 $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$.

解：被积函数 $f(z)=\frac{1}{1+z^2}=\frac{1}{(z-\mathrm{i})(z+\mathrm{i})}$，有两个单极点 $z_0=\pm\mathrm{i}$，其中只有 $z_0=\mathrm{i}$ 在上半平面上，其留数为

$$\mathrm{Res}f(\mathrm{i})=\left.\frac{1}{(1+z^2)'}\right|_{z=\mathrm{i}}=\frac{1}{2\mathrm{i}}.$$

所以

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}f(i)=\pi.$$

例 4 （P.81,2(1)）计算实变积分 $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$.

解：

$$f(z)=\frac{z^2+1}{z^4+1}=\frac{z^2+1}{(z^2+\mathrm{i})(z^2-\mathrm{i})}$$

$$=\frac{z^2+1}{[z-\frac{\sqrt{2}}{2}(1-\mathrm{i})][z+\frac{\sqrt{2}}{2}(1-\mathrm{i})][z-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i})][z+\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i})]}$$

它具有四个极点，其中只有 $z_0 = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1-\mathrm{i})$, $\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i})$ 在上半平面，其留数分别为

$$\operatorname{Res} f\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(\mathrm{i}-1)\right] = \lim_{z\to z_0}\left[\frac{z^2+1}{(z^2+\mathrm{i})\left[z-\frac{\sqrt{2}}{2}(1-\mathrm{i})\right]}\right] = \frac{1}{2\sqrt{2}\,\mathrm{i}},$$

$$\operatorname{Res} f\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(\mathrm{i}+1)\right] = \lim_{z\to z_0}\left[\frac{z^2+1}{(z^2+\mathrm{i})\left[z+\frac{\sqrt{2}}{2}(1-\mathrm{i})\right]}\right] = \frac{1}{2\sqrt{2}\,\mathrm{i}},$$

$$I = 2\pi\mathrm{i}\cdot\left[\frac{1}{2\sqrt{2}\,\mathrm{i}}+\frac{1}{2\sqrt{2}\,\mathrm{i}}\right] = \sqrt{2}\,\pi\,.$$

本题和下面几题都属于类型二，方法类似.

✪ 例 5 （P.81,2(2)）计算实变积分 $\int_0^\infty \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(x^2+9)(x^2+4)^2}$.

解：由于被积函数是偶函数，所以

$$\int_0^{\infty}\frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(x^2+9)(x^2+4)^2}=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(x^2+9)(x^2+4)^2},$$

被积函数

$$\frac{z^2}{(z^2+9)(z^2+4)^2}=\frac{z^2}{(z+3\mathrm{i})(z-3\mathrm{i})(z+2\mathrm{i})^2(z-2\mathrm{i})^2},$$

它在上半平面有两个奇点，一个是极点 $z_0=3\mathrm{i}$，一个二阶极点 $z_0=2\mathrm{i}$，其留数分别为

$$\operatorname{Res} f(3\mathrm{i})=\lim_{z\to 3\mathrm{i}}\left[\frac{z^2}{(z+3\mathrm{i})(z^2+4)^2}\right]=\frac{3}{50}\mathrm{i},$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Res} f(2\mathrm{i})&=\lim_{z\to 2\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{z^2}{(z^2+9)(z+2\mathrm{i})^2}\right]\\&=\lim_{z\to 2\mathrm{i}}\left\{\frac{2z}{(z^2+9)(z+2\mathrm{i})^2}-\frac{2z^3(z+2\mathrm{i})^2+2z^2(z^2+9)(z+2\mathrm{i})}{[(z^2+9)(z+2\mathrm{i})^2]^2}\right\}\\&=-\frac{13}{200}\mathrm{i},\end{aligned}$$

$$I = 2\pi i \cdot \frac{1}{2}\left[\frac{3i}{50} - \frac{13i}{200}\right] = \frac{\pi}{200}.$$

4.2.3 第三类*

$\int_0^\infty F(x)\cos mx\mathrm{d}x$, $\int_0^\infty G(x)\sin mx\mathrm{d}x$，积分区间是 $[0,+\infty)$，偶函数 $F(x)$ 和奇函数 $G(x)$ 在实轴上没有奇点，在上半平面除有限个奇点外是解析的；当 z 在上半平面或实轴上 $\to\infty$ 时，$F(x)$ 和 $G(x)$ 一致地 $\to 0$.

首先，把所求积分的形式变换一下，例如

$$\int_0^\infty F(x)\cos mc\mathrm{d}x = \int_0^\infty F(x)\frac{1}{2}(e^{imx} + e^{-imx}\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty F(x)e^{imx}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^\infty F(x)e^{-imx}\mathrm{d}x.$$

右边第二个积分中做变数代换 $x=-y$，并考虑到 $F(x)$ 是偶函数，有

$$\int_0^{\infty} F(x)\cos mc\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} F(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_0^{-\infty} F(y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}my}\mathrm{d}y.$$

定积分的值并不取决于积分变数采用什么记号．把右边第二个积分的积分变数改记作 x，则

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} F(x)\cos mc\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_0^{\infty} F(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} F(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}\mathrm{d}x. \qquad (4.2\text{-}7)\end{aligned}$$

同理

$$\int_0^{\infty} G(x)\cos mc\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} G(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}\mathrm{d}x. \qquad (4.2\text{-}8)$$

从(4.2-7)和(4.2-8)可知，知道所求积分已化为类型二．按照类型二，本当要求：当 z 在上半平面或实轴上 $\to\infty$ 时，$zF(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz}$ 和 $zG(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz}$ 一致地 $\to 0$．但是利用下述约当引理，可把条件放宽为 $F(z)$

和 $G(z)$ 一致地 $\to 0$.

✪ 约当引理：如 m 为正数，C_R 是以原点为圆心而位于上半平面的半圆周(图4—4)，又设当 z 在上半平面或实轴上 $\to\infty$ 时 $F(z)$ 一致地 $\to 0$，则

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}F(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz}\mathrm{d}z=0.$$

证明略.

根据约当引理．对于(4.2-7)和(4.2-8)右边两个积分，在放宽的条件下仍然可以引用(4.2-6)．于是得到结果

$$\int_0^{\infty}F(x)\cos mx\mathrm{d}x=\pi\mathrm{i}\{F(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz}\text{ 在上半平面所有奇点的留数和}\},\tag{4.2-9}$$

$$\int_0^{\infty}G(x)\sin mx\mathrm{d}x=\pi\{G(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz}\text{ 在上半平面所有奇点的留数和}\}.\tag{4.2-10}$$

注意在式(4.2-9)和(4.2-10)右边 { } 里的是 $F(z)e^{imz}$ 和 $G(z)e^{imz}$，不要误为 $F(z)\cos mz$ 和 $G(z)\sin mz$.

例 6 （P82,3(3)）计算实变函数定积分 $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x}{1+x^2}\,dx$.

解：因被积函数是偶函数，所以

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x}{1+x^2}\,dx=2\int_{0}^{\infty}\frac{x\sin x}{1+x^2}\,dx\,.$$

上式的中被积函数 $G(z)e^{iz}=\frac{z}{1+z^2}e^{iz}=\frac{ze^{iz}}{(z+i)(z-i)}$ 在上半平面有一个单极点 $z_0=i$，且

$$\mathrm{Res}\,f(i)=\lim_{z\to i}\left(\frac{z}{z+i}\right)e^{iz}=\frac{1}{2e}\,.$$

$$I=\pi\cdot 2\left(\frac{1}{2e}\right)=\frac{\pi}{e}\,.$$

例 7 P82,3(5)）计算实变函数定积分 $\int_0^{\infty} \frac{\cos mx}{(x^2+\alpha^2)^2}\,dx$.

解：被积函数

$$F(z)e^{imz} = \frac{e^{imz}}{(z^2+a^2)^2} = \frac{e^{imz}}{(z+\mathrm{i}\alpha)^2(z-\mathrm{i}\alpha)^2}$$

在上半平面上只有一个二阶极点 $z_0 = \mathrm{i}\alpha$**，其留数为**

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}\,f(ai) &= \lim_{z\to \mathrm{i}\alpha} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{e^{imz}}{(z+\mathrm{i}\alpha)^2}\right] \\ &= \lim_{z\to \mathrm{i}\alpha}\left[\frac{ime^{imz}}{(z+\mathrm{i}\alpha)^2} - \frac{2e^{imz}}{(z+\mathrm{i}\alpha)^3}\right] \\ &= -\frac{(\alpha m+1)e^{-m\alpha}}{4\alpha^3}.\end{aligned}$$

$$I = \pi\mathrm{i}\left[-\frac{(\alpha m+1)e^{-m\alpha}}{4\alpha^3}\mathrm{i}\right] = \frac{\pi(\alpha m+1)e^{-m\alpha}}{4\alpha^3}.$$

4.2.4 实轴上有单极点的情况*

不要求.