第五章 Fourier 变换

在许多实际问题中，人们往往通过适当的变换把一个复杂的问题化成简单的问题来研究．例如，通过对对数变换，把除法运算化为加减运算，通过分式线性变换把复杂区域化为简单区域等．本张从 Fourier 级数出发，引出在电学、力学、控制理论等许多工程和科学领域中有广泛应用的积分变换—Fourier 变换及其基本性质和一些简单应用．

Fourier 级数的应用可在力学中振动和波动部分找到：任何振动和波动都可表示为谐振动和谐波的叠加— Fourier 级数展开．

简谐振动是振动或周期运动的一种，许多实际的周期运动并不是谐振动．例如，各种乐器的振动大多不是谐振动．对小提琴的锯齿振

动，就可以表示为

$$f(t)=\sum_{k=0}^{\infty} A_k\cos(k\omega t+\varphi_k)$$

所谓音色，就取决于 $A_0, A_1, A_2, \cdots$ 的比值，声音是否和谐也取决于这些比例．小提琴的一系列谐振动的振幅之比具有非常简单而有规律的比例 $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots$，这就是小提琴音色优美的物理原因．

§5.1 Fourier 级数

本节简要概述 Fourier 级数的基本内容.

5.1.1 周期函数的 Fourier 级数展开

设函数 $f(x)$ 以 2ℓ 为周期，即

$$f(x) = f(x+2\ell). \tag{5.1-1}$$

则函数 $f(x)$ 可以正余弦函数族作为展开基（基本函数族）展开：

三角函数系：

$$\begin{aligned} &1, \cos\frac{\pi x}{\ell}, \cos\frac{2\pi x}{\ell}, \cdots, \cos\frac{k\pi x}{\ell}, \cdots, \\ &\sin\frac{\pi x}{\ell}, \sin\frac{2\pi x}{\ell}, \cdots, \sin\frac{k\pi x}{\ell}, \cdots. \end{aligned} \tag{5.1-2}$$

Fourier 级数：

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{\ell} + b_k\sin\frac{k\pi x}{\ell}\right). \tag{5.1-3}$$

这就是周期函数的 $f(x)$ 的 Fourier 展开式，其系数称为 Fourier 系数.

函数族(5.1-2)满足正交归一关系：

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{-\ell}^{\ell} \cos\frac{k\pi}{\ell}x\cos\frac{n\pi}{\ell}x\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & k \neq n \\ \dfrac{1}{\delta_k \ell} = \begin{cases} \dfrac{1}{\ell} & k = n \neq 0 \\ \dfrac{1}{2\ell} & k = n = 0 \end{cases} \end{cases} \\ \displaystyle\int_{-\ell}^{\ell} \sin\frac{k\pi}{\ell}x\sin\frac{n\pi}{\ell}x\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & k \neq n \\ \dfrac{1}{\ell} & k = n \end{cases} \\ \displaystyle\int_{-\ell}^{\ell} \cos\frac{k\pi}{\ell}x\sin\frac{n\pi}{\ell}x\,\mathrm{d}x = 0. \end{cases} \tag{5.1-4}$$

(5.1-3)中的展开系数— Fourier 系数为

$$\begin{cases} a_k = \dfrac{1}{\delta_k \ell}\displaystyle\int_{-\ell}^{\ell} f(\xi)\cos\frac{k\pi\xi}{\ell}\mathrm{d}\xi, \\ b_k = \dfrac{1}{\ell}\displaystyle\int_{-\ell}^{\ell} f(\xi)\sin\frac{k\pi\xi}{\ell}\mathrm{d}\xi. \end{cases} \tag{5.1-5}$$

式(5.1-4)和(5.1-5)中，

$$\delta = \begin{cases} 1, & k \neq 0 \\ 2, & k = 0 \end{cases} \tag{5.1-6}$$

称为 δ 符号.

设 $\omega = \frac{2\pi}{2\ell} = \frac{\pi}{\ell}$，则上面的讨论可表示为更明显的具有周期性的问题

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega x + b_k \sin k\omega x.$$

5.1.2 Dirichlet 定理—Fourier 级数的收敛性判据*

若函数 $f(x)$ 满足条件：（1）处处连续或在每个周期中只有有限个第一类间断点；（2）在每个周期中只有有限个极值点，则 Fourier 级数(5.1-3)收敛，且

$$\text{级数和} = \begin{cases} f(x) & (\text{在连续点})x, \\ \dfrac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\} & (\text{在间断点})x. \end{cases} \tag{5.1-7}$$

证明：需要较多的数学知识，略去.

5.1.3 奇偶函数的 Fourier 展开

如果周期函数 $f(x)$ 是奇函数或偶函数，则其 Fourier 展开式也必须是奇函数或偶函数，因而其 Fourier 系数 a_k 或 b_k 为零，相应的 Fourier 级数分别是 Fourier 正弦或余弦级数.

$f(x)$ 为奇函数时：

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{k\pi\xi}{\ell}, \tag{5.1-8}$$

$$b_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(\xi) \sin \frac{k\pi\xi}{\ell} \mathrm{d}\xi. \tag{5.1-9}$$

$f(x)$ 为偶函数时：

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi\xi}{\ell}, \tag{5.1-10}$$

$$a_k = \frac{2}{\delta_k \ell} \int_0^{\ell} f(\xi) \cos \frac{k\pi\xi}{\ell} \mathrm{d}\xi. \tag{5.1-11}$$

5.1.4 非周期函数的 Fourier 级数展开—延拓法

对于只在有限区间，例如在 $(0, \ell)$ 上有定义的函数 $f(x)$)，可以采取延拓的方法，使其成为某种周期函数 $g(x)$，而在 $(0, \ell)$

上，$g(x) \equiv f(x)$．然后再对 $f(x)$ 作 Fourier 级数展开，其级数和在区间 $(0, \ell)$ 上代表 $f(x)$．

由于 $f(x)$ 在 $(0, \ell)$ 外无定义，因此，可以有无数种延拓方式，因而有无数种展开式，但它们在 $(0, \ell)$ 上均代表 $f(x)$．实际问题中，常常存在一定的条件（环境和边界等），如在区间的端点固定或自由，由此决定了（限制）了延拓的方式．例如要求

$$f(0) = f(\ell) = 0 =: \text{奇延拓},$$

$$f'(0) = f'(\ell) = 0 =: \text{偶延拓}.$$

非周期函数的 Fourier 级数展开在工程技术上有重要的应用价值，下节将予以专门讨论．

5.1.5 复数形式的 Fourier 级数

取复指数函数族

$$\cdots, e^{-i\frac{k\pi x}{\ell}}, \cdots, e^{-i\frac{2\pi x}{\ell}}, e^{-i\frac{\pi x}{\ell}}, 1, e^{i\frac{pix}{\ell}}, e^{i\frac{2\pi x}{\ell}}, \cdots, e^{i\frac{k\pi x}{\ell}}, \qquad (5.1\text{-}12)$$

作为基本函数系，并利用 Euler 公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta,$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right), \qquad \sin\theta = \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right).$$

可将前面的周期函数 $f(x)$ 的 Fourier 级数展开式(5.1-3)改写为复数形式

$$f(x) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(C_k e^{ik\omega x} + C_{-k}e^{-ik\omega x}\right)$$

$$C_0 = a_0, \qquad C_k = \frac{a_k - ib_k}{2}, \qquad C_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2}.$$

上式可以表示为更简洁的形式

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ik\omega x}. \tag{5.1-13}$$

复指数函数系(5.1-12)的正交归一性

$$\int_{-T/2}^{T/2} e^{ik\omega x} e^{-in\omega x} dx = \begin{cases} 0 \quad, & k \neq n, \\ T = 2\ell, & k = n, \end{cases}$$

Fourier 展开系数为

$$C_k = \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(\xi) \left[e^{i\frac{k\pi\xi}{\ell}} \right]^* d\xi. \tag{5.1-14}$$

显然有

$$C_k^* = C_{-k}. \tag{5.1-15}$$

5.1.6 例

例 1 (P.91，1)交流电压 $E_0 \sin \omega t$ 经过全波振流，成为 $E(t) = E_0|\sin \omega t|$. 试将其展为 Fourier 级数.

解：交流电压 $E_0 \sin \omega t$ 在区间 $-\pi \le \omega t \le \pi$ 上是一个周期，令 $\omega t = x$，则经过振流后成为：

$$E(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

其中系数

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{E_0}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{E_0}{\pi}(-\cos x)\Big|_0^{\pi} = \frac{2E_0}{\pi}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} E(-\sin x)\cos kx\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} E_0 \sin x \cos kx\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} E_0 \sin x \cos kx\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{E_0}{2}[\sin(kx + x) - \sin(kx - x)]\,\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{E_0}{\pi}\left[\frac{\cos(k+1)x}{k+1} - \frac{\cos(k-1)x}{k-1}\right]_0^{\pi}$$

$$= \begin{cases} 0\,, & (\text{当}k\text{为奇数时, 但}k \neq 1). \\ \frac{4E_0}{\pi(1-k^2)}\,, & (\text{当}k\text{为偶数时}). \end{cases}$$

当$k = 1$时,

$$a_1 = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} E_0 \sin x \cos x\,\mathrm{d}x = \frac{E_0}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin^2 2x\,\mathrm{d}x = 0,$$

又令$k = 2n$时，则

$$a_k = a_{2n} = \frac{4E_0}{\pi(1-4n^2)},\quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

同理，可以计算的b_k

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} E_0 \sin x \sin kx\,\mathrm{d}x = 0.$$

所以

$$E(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos 2nx = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos 2n\omega t$$
$$= \frac{2E_0}{\pi} + \frac{4E_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n\omega t}{1-4n^2}.$$

例 2 (P.92，2)将锯齿波展为 Fourier 级数．在 $(0,T)$ 这个周期上，该锯齿波可表为 $f(x) = x/3$．

解：锯齿波之周期为 T．令

$$2l = T,$$

得

$$l = \frac{T}{2},$$

将 l 代入以 $2l$ 为周期之 Fourier 级数和 Fourier 系数表达式即可得适合本题 Fourier 级数和 Fourier 系数表达式:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{2n\pi}{T}t + b_n \sin\frac{2n\pi}{T}t\right).$$

Fourier 系数的计算如下:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{3}x\cdot\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{3T}\cdot\frac{1}{2}x^2\Big|_0^T = \frac{T}{6},$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\frac{2n\pi}{T}t\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{2}{T}\int_0^T \frac{1}{3}x\cos\frac{2n\pi}{T}x\,\mathrm{d}x\ ,$$

应用积分公式:

$$\int x\cos Px\,\mathrm{d}x = \frac{1}{P^2}\cos Px + \frac{x}{P}\sin Px$$

$$a_n = \frac{2}{T}\cdot\frac{1}{3}\left[\frac{1}{\left(\frac{2n\pi}{T}\right)}^2\cos\frac{2n\pi}{T}x + \frac{x}{\frac{2n\pi}{T}}\sin\frac{2n\pi}{T}x\right]_0^T$$

$$= \frac{2}{3T}\left(\frac{T}{2n\pi}\right)^2\left[\cos\frac{2n\pi}{T}x + \frac{2n\pi}{T}x\sin\frac{2n\pi}{T}x\right]_0^T$$

$$= 0\ ,$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\frac{2n\pi}{T}t\,\mathrm{d}t = \frac{2}{T}\int_0^T \frac{1}{3}x\sin\frac{2n\pi}{T}x\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{T} \cdot \frac{1}{3} \left[\frac{1}{\left(\frac{2n\pi}{T}\right)^2} \sin \frac{2n\pi}{T} x - \frac{x}{\frac{2n\pi}{T}} \cos \frac{2n\pi}{T} x \right]_0^T$$

$$= \frac{2}{3T} \left(\frac{T}{2n\pi} \right)^2 \left[\sin \frac{2n\pi}{T} x - \frac{2n\pi}{t} x \cos \frac{2n\pi}{T} x \right]_0^T$$

$$= -\frac{T}{3n\pi},$$

$$f(x) = \frac{T}{6} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T}{3n\pi} \sin \frac{2n\pi}{T} x .$$

✪ **例 3 (P.92，4(1))将函数 $f(x) = \cos^3 x$. 展为Fourier级数.**

解：可按书上的标准方法展开．此外，还可令 $t = e^{ix}$ 后把 $f(x)$ 化为 t 的有理分式，展为 Taylor 级数后再将变数换回 x.

$$f(x) = \cos^3 x = \left[\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right]^3$$

$$= \frac{1}{8}\left[e^{\mathrm{i}3x} + 3e^{\mathrm{i}x} + 3e^{-\mathrm{i}x} + e^{-\mathrm{i}3x}\right]$$
$$= \frac{3}{4}\cdot\frac{e^{\mathrm{i}x} + e^{-\mathrm{i}x}}{2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{e^{\mathrm{i}3x} + e^{-\mathrm{i}3x}}{2}$$
$$= \frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos 3x.$$

注：本题其实就是三倍角公式：

$$\cos 3x = 4\cos^{x} - 3\cos x$$

所以

$$f(x) = \cos^3 x = \frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos 3x.$$

✪ 例 4 (P.92，4(3))在 $(-\pi, \pi)$ 这个周期上，$f(x) = \cos\alpha x$，(α 非整数)．将其展为Fourier级数．

解：因为 $f(x)$ 是偶函数，所以 $b_k = 0$，

$$f(x) = a_0 \sum_{k==1}^{\infty} a_k \cos kx.$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos\alpha\xi \,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\alpha\pi}\sin\alpha\xi\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{\sin\alpha\pi}{\alpha\pi}.$$

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos\alpha\xi\cos k\xi \,\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(k+\alpha)\xi \,\mathrm{d}\xi + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(k-\alpha)\xi \,\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(k+\alpha)\xi}{k+\alpha} + \frac{\sin(k-\alpha)\xi}{k-\alpha}\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(k+\alpha)\pi}{k+\alpha} + \frac{\sin(k-\alpha)\pi}{k-\alpha}\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{k+\alpha}[\sin k\pi\cos\alpha\pi - \cos k\pi\sin\alpha\pi]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{k-\alpha}[\sin k\pi\cos\alpha\pi-\cos k\pi\sin\alpha\pi]\\
&=\frac{1}{\pi}\cos k\pi\sin\alpha\pi\left[\frac{1}{k+\alpha}-\frac{1}{k-\alpha}\right]\\
&=\frac{1}{\pi}(-1)^k\sin\alpha\pi\cdot\frac{-2\alpha}{k^2-\alpha^2}\\
&=\frac{(-1)^{k+1}}{\pi}\sin\alpha\pi\cdot\frac{2\alpha}{k^2-\alpha^2}.
\end{aligned}
$$

所以

$$
f(x)=\frac{2\sin\alpha\pi}{\pi}\left[\frac{1}{2\alpha}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha(-1)^{k+1}}{k^2-\alpha^2}\cos kx\right].
$$

作业(No.9)

P. 92：

2；4(1)、4(3)；5(1)、5(3)